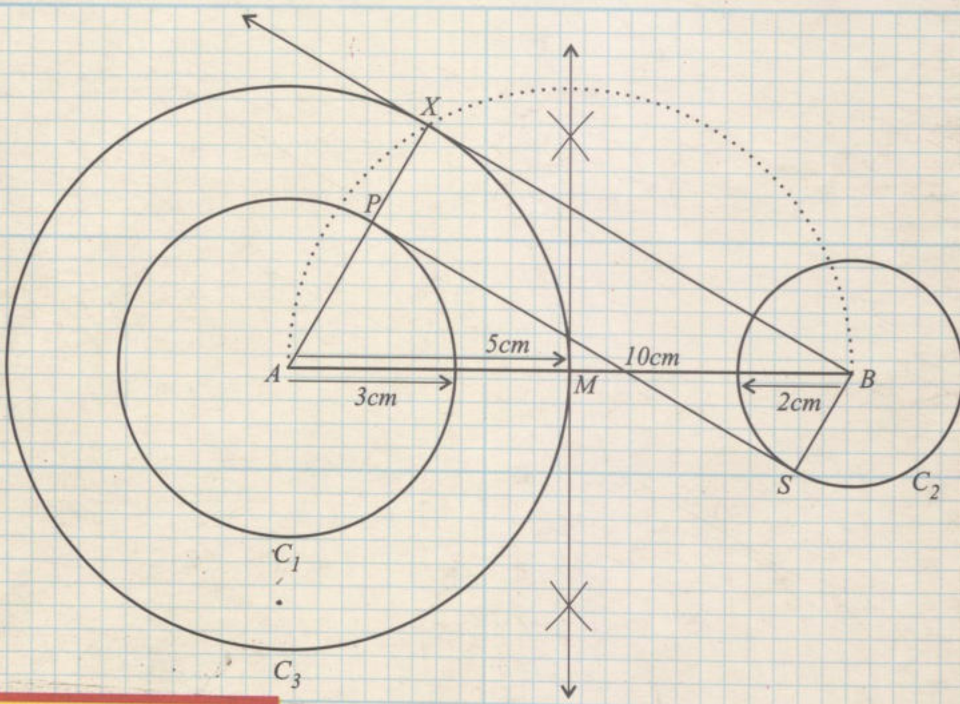
نیا ایڈیشن

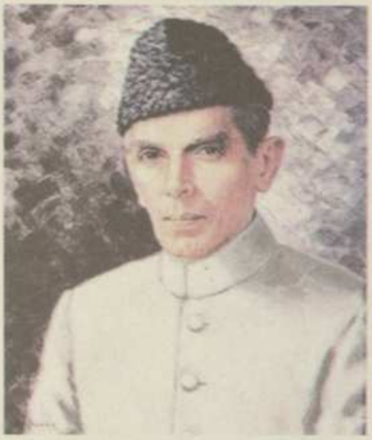
جنرل ریاضی

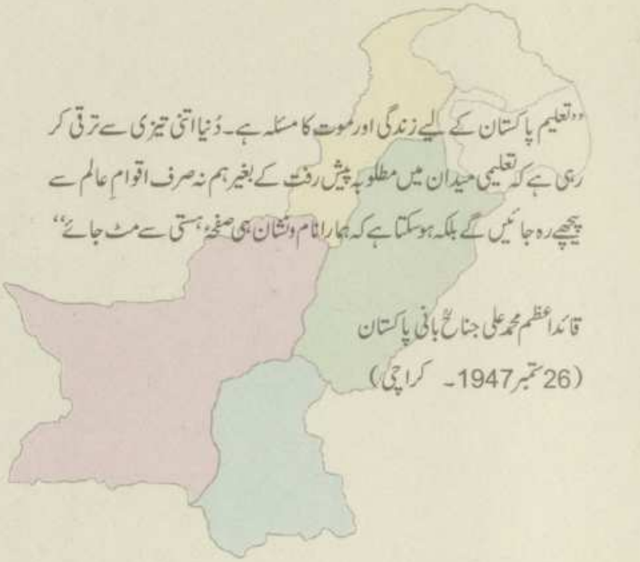
10



یہ کتاب حکومت پنجاب کی طرف سے
تعلیمی سال 2013-2020 کے لیے پنجاب کے
سرکاری سکولوں میں تقسیم کی گئی جیکٹ میں شامل ہے۔

ناشر: علی برادران





"تعلیم پاکستان کے لیے زندگی اور موت کا مسئلہ ہے۔ دُنیا اتنی تیزی سے ترقی کر رہی ہے کہ تعلیمی میدان میں مطلوبہ پیش رفت کے بغیر ہم نہ صرف اقوامِ عالم سے پیچھے رہ جائیں گے بلکہ ہوسکتا ہے کہ ہمارا نام ونشان ہی صفحۂ ہستی سے مٹ جائے"

قائداعظم محمد علی جناح بانی پاکستان
(26 ستمبر 1947۔ کراچی)

جنرل ریاضی کا مضمون خاص طور پر ان طلباء کے لیے تیار کیا گیا ہے جنہوں نے اوپر کی جماعتوں میں ریاضی اور سائنس کا خصوصی مطالعہ کرنے کی بجائے سوشل سائنس کا مطالعہ کرنا ہوتا ہے۔ جنرل ریاضی کا نصاب خاص طور پر آرٹس گروپ اور علوم شریعہ کے طالب علموں کو مدنظر رکھ کر تیار کیا گیا ہے تاکہ وہ عملی زندگی میں حساب کتاب میں مہارت حاصل کر لیں۔ جنرل ریاضی کے نصاب میں کاروباری ریاضی، مالیاتی ریاضی، صارفین کی ریاضی اور بنیادی شماریات جیسے مضامین شامل کیے گئے ہیں۔ اس نئے نصاب کے پرانے نصاب کے مقابلے میں بہت کم وقت دینا پڑے گا اور اس سے جو وقت بچے گا وہ دوسرے مضامین کے مطالعہ میں صرف ہو سکے گا۔

مصنفین اور مدیران نے اس کتاب کی تیاری میں بہت محنت کی ہے اور اسے قومی نصاب ۲۰۰۶ء کے مطابق تیار کیا ہے۔ معلمین، طلبہ اور ان کے والدین سے درخواست ہے کہ اس کتاب (جنرل ریاضی) کا گہرا تنقیدی مطالعہ کریں اور اغلاط اور خامیوں سے مطلع کریں۔ ان کا یہ اقدام یقیناً بہت بڑا قومی خدمت ہوگا۔

ناشر
محبوب علی عاصم

اس کتاب کو پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ لاہور نے ناشر سے پرنٹ لائسنس حاصل
کر کے سرکاری سکولوں میں مفت تقسیم کے لیے بھی طبع کیا ہے۔
ناشر کی تحریری اجازت کے بغیر اس کتاب کا کوئی حصہ کسی امدادی کتاب،
خلاصہ، ماڈل پیپر یا گائیڈ وغیرہ میں شامل نہیں کیا جاسکتا۔

جنرل ریاضی

10

ناشر: علی برادران
پنجاب پلازہ مچھلی منڈی اردو بازار لاہور
فون: 042-37242233 فیکس: 042-37361207
ویب سائٹ www.alibrotheran.com ای میل info@alibrotheran.com

جملہ حقوق بحق ناشر علی برادران لاہور محفوظ ہیں۔
بمطابق قومی نصاب 2006ء اور نیشنل ٹیکسٹ بک اینڈ لرننگ میٹریلز پالیسی 2007ء
منظور کردہ: پنجاب کریکولم اتھارٹی (پنجاب) لاہور
بذریعہ مراسلہ نمبر PCA-12/19 تاریخ 27 نومبر 2012

فہرست

یونٹ نمبر	عنوانات	صفحہ نمبر
1	الجبری کلیے اور ان کے اطلاق	1
2	تجزی	35
3	الجبری حسابات	57
4	یک درجی مساوات اور غیر مساوات	85
5	دو درجی مساوات	107
6	قالب اور مقطع	127
7	جیومیٹری کے بنیادی تصورات	175
8	عملی جیومیٹری	221
9	رقبہ اور حجم	247
10	محدداتی جیومیٹری کا تعارف	275
	جوابات	289
	فرہنگ	301
	علامات	306
	انڈیکس	307

ممبران ریویو کمیٹی

ڈاکٹر طارق محمود ڈی۔ای۔اے۔ کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک ونگ
(وزارت کیپٹل ڈویلپمنٹ اتھارٹی۔اسلام آباد۔)
پروفیسر ڈاکٹر ایم۔اسلم شعبہ ریاضی (قائداعظم یونیورسٹی اسلام آباد)
پروفیسر ڈاکٹر شاہد مبین شعبہ ریاضی (سرگودھا یونیورسٹی سرگودھا)
منور دین اعوان اے۔ای۔اے (ر) کریکولم ونگ
(وفاقی وزارت تعلیم (ڈی فنکٹ) اسلام آباد)
پروفیسر ڈاکٹر ایم۔اسلم ملک شعبہ ریاضی
(پنجاب یونیورسٹی، قائداعظم کیمپس لاہور)
ڈاکٹر بشریٰ سینئر ہیڈ مسٹریس
(گورنمنٹ مسلم ماڈل گرلز ہائی سکول، گوجرانوالہ)
فہیم حسین سینئر ماہر مضمون (پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ لاہور)
افضال حسین ڈیسک آفیسر (پنجاب کریکولم اتھارٹی لاہور)

مصنفین: ڈاکٹر محمد عذیر احمد (پی۔ایچ۔ڈی)، مقصود رضا احمد (ایم ایس سی، ایم فل)
ایڈیٹر: جاوید اقبال (ایم ایس سی)
ترجمہ: محمد اقبال باقر (ایم ایس سی)، جاوید اقبال (ایم ایس سی)
کوآرڈینیٹر: محبوب علی عاصم
کمپوزنگ اینڈ ڈیزائننگ: کاشف لطیف۔محمد طاہر

ناشر: علی برادران پنجاب پلازہ اردو بازار لاہور
مطبع: علی برادران پبلشرز اینڈ پرنٹرز لاہور

تاریخ اشاعت	ایڈیشن	بار	تعداد	قیمت
مارچ 2019ء	پنجم	اول	25000	147.00

یونٹ

1

ALGEBRAIC FORMULAS AND APPLICATIONS

الجبری کلیے اور ان کا اطلاق

◄ الجبری جملے ◄ الجبری کلیے ◄ مقادیر اصم اور ان کا اطلاق ◄ ناطق بنانا

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ایک ناطق جملہ، ناطق عدد ہوتا ہے۔
- ایک ناطق جملہ دو کثیر درجی جملوں $p(x)$ اور $q(x)$ کا حاصل قسمت $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی صورت میں ظاہر جبکہ $q(x)$ غیر صفر کثیر رقمی ہوتا ہے۔
- یہ مشاہدہ کرلیں کہ دیا گیا الجبری جملہ ایک • کثیر رقمی جملہ ہے یا نہیں • ناطق جملہ ہے یا نہیں
- $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو ایک مختصر ترین درجہ والی رقوم میں لکھ سکیں ۔ جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ جملوں کے عددی سر صحیح اعداد ہوں اور کوئی مشترک جزو ضربی نہ ہوں۔
- مشاہدہ کرسکیں کہ دیا گیا ناطق جملہ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں۔
- دیے گئے ناطق جملہ کو مختصر ترین رقوم میں ظاہر کرنا۔ ◄ ناطق جملوں کا مجموعہ، فرق اور حاصل ضرب معلوم کرسکیں۔
- ایک ناطق جملہ کو دوسرے ناطق جملہ سے تقسیم کرنا اور حاصل شدہ رقوم کو مختصر ترین صورت میں لکھنا۔
- الجبری جملہ کی کسی خاص حقیقی عدد کے لیے قیمت معلوم کرسکیں۔
- کلیے $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ ، $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ جان سکیں۔
- $(a+b)$ ، $(a-b)$ کی قیمتیں معلوم ہوں تو a^2+b^2 اور ab کی قیمت معلوم کرسکیں۔
- کلیہ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ کو جان سکیں
  - $a^2+b^2+c^2$ کی قیمت معلوم کرسکیں جبکہ $a+b+c$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
  - $a+b+c$ کی قیمت معلوم کرسکیں جبکہ $a^2+b^2+c^2$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔
- کلیے $(a\pm b)^3=a^3\pm 3ab(a\pm b)\pm b^3$ ، $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$ حاصل کرسکیں۔
  - $a^3\pm b^3$ کی قیمتیں معلوم کرسکیں $a\pm b$ اور ab دیے گئے ہوں۔ • تسلسل حاصل ضرب $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ معلوم کرسکیں۔
- مقادیر اصم کی پہچان اور ان کا
- دوسرے درجہ کی مقادیر اصم کی وضاحت کرنا۔ دوسرے درجہ کی مقادیر اصم پر بنیادی عوامل استعمال کرتے ہوئے ان کے مخارج کو ناطق بنانا اور قیمت معلوم کرسکیں۔
- $\frac{1}{a+b\sqrt{x}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ کی طرح کے حقیقی اعداد سے ناطق بنانے کی وضاحت کرسکیں۔ جبکہ 'x' اور 'y' قدرتی اعداد اور 'a'، 'b' صحیح اعداد ہوں۔

1.1 الجبری جملے: ALGEBRAIC EXPRESSIONS

الجبرا حساب کی توسیع ہے الجبرا میں a, b, c جیسے حروف تہجی مستقل مقداروں کو ظاہر کرتے ہیں اور x, y, z کو ہم قابل انتخاب عددی قیمت کیلئے استعمال کرتے ہیں۔

الجبری جملے میں اعداد اور حروف تہجی عوامل کی علامتوں $\div, \times, -, +$ کے ساتھ استعمال ہوتے ہیں جبکہ علامات + اور − الجبری جملے کی رقوم (Terms) کو جدا کرتی ہیں۔

مثال:

$ax + by$	2 رقموں (Terms) پر مشتمل ہے
$3x - 2y$	2 رقموں (Terms) پر مشتمل ہے
$9x^2 - 7xy + 7y^2$	3 رقموں (Terms) پر مشتمل ہے
$5xy$	1 رقم (Term) پر مشتمل ہے

درج بالا میں اعداد $a, b, 3, 2, 9, 7, 5$ ان جملوں میں عددی سر کہلاتے ہیں جبکہ x, y متغیرات کہلاتے ہیں۔

ایک الجبری جملہ تین طرح کا ہوتا ہے۔

(i) کثیر رقمی Polynomial (ii) ناطق جملہ Rational (iii) غیر ناطق جملہ Irrational

x متغیر میں 'n' درجہ کی کثیر رقمی یوں لکھی جاتی ہے۔

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

جبکہ 'n' ایک غیر منفی عدد ہے اور $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_3, a_2, a_1, a_0$ حقیقی اعداد ہیں۔ جبکہ $a_n \neq 0$
چونکہ متغیر 'x' کا سب سے بڑا قوت نما 'n' ہے لہذا اس کثیر رقمی کا درجہ 'n' ہے۔

1.1.1 ناطق جملے: Rational Expressions

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{p}{q}$ کی طرز کا عدد جس میں ($p, q \in Z$ اور $q \neq 0$) ناطق عدد کہلاتا ہے۔

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی طرز میں لکھا گیا ایک جملہ (جس میں $Q(x) \neq 0$ جبکہ $P(x)$ اور $Q(x)$ متغیر x میں کثیر رقمیاں ہیں) ایک ناطق جملہ کہلاتا ہے۔

مثال:

(i) $\frac{x^2+1}{x^3+x^2+3}$ (ii) $\frac{x^3+8}{x+1}$ (iii) $\frac{2x^2+3x+3}{x^2+x+2}$ (iv) $\frac{x+1}{x^2+2x+3}$

ناطق جملے کہلاتے ہیں۔ ناطق جملے، ناطق اعداد کی طرح جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کیے جا سکتے ہیں۔

ناطق جملے دو طرح کے ہوتے ہیں۔

(i) واجب ناطق جملے
(ii) غیر واجب ناطق جملے

واجب ناطق جملے: Proper Rational Expressions

ایک ناطق جملہ $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x) \neq 0$ واجب ناطق جملہ کہلاتا ہے اگر $P(x)$ کا درجہ (degree) $Q(x)$ کے درجے سے کم ہو۔

مثال:

$\frac{3x^3+4x^2+5}{2x^4+1}$, $\frac{x+1}{x^2+3x+7}$ واجب ناطق جملے ہیں

غیر واجب ناطق جملے: Improper Rational Expressions

ایک ناطق جملہ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، $Q(x) \neq 0$ جس میں $P(x)$ کا درجہ (degree) $Q(x)$ کے درجہ کے برابر یا اس کے درجہ سے بڑا ہو غیر واجب ناطق جملہ کہلاتا ہے۔

مثال:

$\frac{x+5}{x-1}$ ، $\frac{x^3+1}{x^2-x+4}$ ، $\frac{x^2+4x+9}{x^2+1}$ ، $\frac{x^2+2x+4}{x+1}$ غیر واجب ناطق جملے ہیں

1.1.3- دیے گئے الجبری جملہ کا مشاہدہ Examine a Given Algebraic Expression

درج ذیل جملوں پر غور کیجیے۔

(i) $2x^2+3x+9$ (ii) $x+5$ (iii) $\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+1$ (iv) $\frac{-4}{x^3}$

(i) اور (ii) کثیر رقمی ہیں لیکن (iii) اور (iv) کثیر رقمی نہیں۔ کیونکہ (iii) اور (iv) متغیرات کے قوت نما صحیح اعداد نہیں ہیں۔

درج ذیل پر بھی غور کیجیے۔

(i) $\frac{x+1}{x^3+x^2+3}$ (ii) $\frac{x^3+1}{x-1}$ (iii) $\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1$

(iv) $2\sqrt{y}+\frac{3}{\sqrt{x}}+1$ (v) $\frac{\sqrt{y}+3}{x^{2/3}}$

(i) اور (ii) ناطق جملے ہیں لیکن (iii) اور (iv) اور (v) ناطق جملے نہیں ہیں۔ کیونکہ متغیرات کے قوت نما صحیح اعداد ہیں۔

1.1.4- ناطق جملے اپنی مختصر ترین شکل میں
Rational Expressions in its Lowest Terms

اگر A, B اور C کثیر رقمیاں ہوں جبکہ $B, C \neq 0$ ہو تو $\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$
(جو کہ کسور کا بنیادی قانون کہلاتا ہے)

اس اصول کو ناطق جملوں کو مختصر ترین شکل میں تبدیل کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

ایک ایسا ناطق جملہ جس کے شمار کنندہ اور مخرج میں '1' اور -1 کے علاوہ کوئی مشترک جز نہ ہو اپنی مختصر ترین شکل میں کہلاتا ہے۔

یہ جاننے کے لیے کہ کوئی جملہ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں، ہم دی گئی مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال:- $\frac{8x^3y^2}{12xy^5}$ کی مختصر ترین شکل معلوم کریں۔

حل:

$$\frac{8x^3y^2}{12xy^5} = \frac{2x^2.4xy^2}{3y^3.4xy^2}$$

$$= \frac{2x^2}{3y^3}$$

پس کسی بھی ناطق جملے کو مختصر ترین شکل میں تبدیل کرنے کے لیے سب سے پہلے ہم شمار کنندہ اور مخرج کے اجزائے ضربی بناتے ہیں اور اس کے بعد کسروں کے بنیادی اصول کی مدد سے مطلوبہ جملہ حاصل کرتے ہیں۔

مثلاً

$$\frac{b^2-a^2}{b^3-a^3} = \frac{(b-a)(b+a)}{(b-a)(b^2+ab+a^2)}$$

$$= \frac{b+a}{b^2+ab+a^2}$$

1.1.5- ناطق جملوں کا اختصار Reduce a Rational Expression to its Lowest Terms

مثال:- مختصر ترین شکل میں تبدیل کریں۔

(i) $\frac{32x^5x^7}{-4x^2y^9}$ (ii) $\frac{2-x}{3x^2-5x-2}$

حل:

(i) $\frac{32x^5y^7}{-4x^2y^9}$

$$= -\frac{8x^3.4x^2y^7}{y^2.4x^2y^7}$$

$$= -\frac{8x^3}{y^2}$$

(ii) $\frac{2-x}{3x^2-5x-2}$

$$= \frac{2-x}{3x^2-6x+x-2}$$

$$= \frac{2-x}{3x(x-2)+1(x-2)}$$

$$= \frac{2-x}{(3x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{(-1)(x-2)}{(3x+1)(x-2)}$$

$$= \frac{-1}{3x+1}$$

1.1.6- ناطق جملوں کی جمع، تفریق اور ضرب Sum, Difference and Product of Rational Expressions

ہم ناطق جملوں کی جمع، تفریق اور ضرب درج ذیل مثالوں سے سیکھتے ہیں۔

مثال 1:-

حل کریں۔

(i) $\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}+\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$

(ii) $\dfrac{x+2}{x^3+1}+\dfrac{x}{x^2-1}$

حل:

(i) $\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}+\dfrac{x+2}{x^2-4x+3}$

$$=\frac{x+1}{x^2-2x-x+2}+\frac{x+2}{x^2-3x-x+3}$$

$$=\frac{x+1}{x(x-2)-1(x-2)}+\frac{x+2}{x(x-3)-1(x-3)}$$

$$=\frac{x+1}{(x-2)\ (x-1)}+\frac{x+2}{(x-3)\ (x-1)}$$

$$=\frac{(x+1)(x-3)\ +\ (x+2)(x-2)}{(x-1)\ (x-2)\ (x-3)}$$

$$=\frac{x^2-3x+x-3+x^2-2x+2x-4}{(x^2-2x-x+2)\ (x-3)}$$

$$=\frac{2x^2-2x-7}{(x^2-3x+2)\ (x-3)}$$

$$=\frac{2x^2-2x-7}{x^3-6x^2+11x-6}$$

$$(ii)\quad \frac{x+2}{x^3+1}+\frac{x}{x^2-1}$$

$$=\frac{x+2}{(x+1)\,(x^2-x+1)}+\frac{x}{(x-1)\,(x+1)}$$

$$=\frac{(x+2)\,(x-1)\,+\,x(x^2-x+1)}{(x+1)\,(x-1)\,(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{x^2+2x-x-2+x^3-x^2+x}{(x^2-1)\,(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{x^3+2x-2}{x^4-x^3+x^2-x^2+x-1}$$

$$=\frac{x^3+2x-2}{x^4-x^3+x-1}$$

مثال 2:-

حل کریں۔

$$(i)\quad \frac{x+3}{x^2-4}-\frac{x-1}{x+2}$$

$$(ii)\quad \frac{x+5}{x^2-6x}-\frac{x}{x-6}$$

حل:

$$(i)\quad \frac{x+3}{x^2-4}-\frac{x-1}{x+2}$$

$$=\frac{x+3}{(x-2)\,(x+2)}-\frac{x-1}{x+2}$$

$$=\frac{(x+3)(1)\,-\,(x-1)(x-2)}{(x-2)\,(x+2)}$$

$$= \frac{x+3-(x^2-2x-x+2)}{x^2-4}$$

$$= \frac{x+3-x^2+3x-2}{x^2-4}$$

$$= \frac{4x-x^2+1}{x^2-4}$$

$$= \frac{1+4x-x^2}{x^2-4}$$

(ii) $\frac{x+5}{x^2-6x} - \frac{x}{x-6}$

$$= \frac{x+5}{x(x-6)} - \frac{x}{x-6}$$

$$= \frac{x+5-x.x}{x(x-6)}$$

$$= \frac{x+5-x^2}{x^2-6x}$$

$$= \frac{5+x-x^2}{x^2-6x}$$

مثال 3:-

مختصر کریں۔

(i) $\frac{x^2+x}{x^2-x} \times \frac{x-1}{x^3+1}$

(ii) $\frac{2x^2}{2x-1} \times \frac{2x-1}{6x+1}$

حل:

(i) $\frac{x^2+x}{x^2-x} \times \frac{x-1}{x^3+1}$

$$= \frac{x(x+1)}{x(x-1)} \times \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{1}{x^2-x+1}$$

(ii) $\frac{2x^2}{2x-1} \times \frac{2x-1}{6x+1}$

$$= \frac{2x^2(2x-1)}{(2x-1)(6x+1)}$$

$$= \frac{2x^2}{6x+1}$$

-1.1.7 ناطق جملوں کی تقسیم: Division of Rational Expressions

ناطق جملوں کی تقسیم کا طریقہ یہ ہے کہ پہلے جملوں کے شمار کنندہ اور مخرج کے اجزائے ضربی بنائیں۔ پھران میں سے مشترک (یکساں) جملے کاٹ دیں۔

مثال:-

مختصر کیجیے۔

(i) $\frac{x^2-2x}{x+1} \div \frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$

(ii) $\frac{3x-1}{1+x} \div \frac{1-3x}{x^2+2x+1}$

حل:

(i) $\frac{x^2-2x}{x+1} \div \frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$

$$= \frac{x(x-2)}{x+1} \div \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{x(x-2)}{x+1} \times \frac{(x+1)\ (x+1)}{(x-2)\ (x+2)} = \frac{x(x+1)}{x+2}$$

$$= \frac{x^2+x}{x+2}$$

(ii) $\frac{3x-1}{1+x} \div \frac{1-3x}{x^2+2x+1}$

$$= \frac{3x-1}{1+x} \div \frac{1-3x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3x-1}{1+x} \times \frac{(x+1)\ (x+1)}{1-3x}$$

$$= \frac{(3x-1)\ (x+1)}{(1-3x)}$$

$$= \frac{(3x-1)\ (x+1)}{-(3x-1)}$$

$$= -(x+1)$$

1.1.8- الجبری جملے کی قیمت Value of an Algebraic Expression

اگر کسی کثیر رقمی $P(x)$ میں 'x' کی جگہ کوئی حقیقی عدد رکھیں تو ہمیں ایک حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔ یہ حقیقی عدد، $P(x)$ کی قیمت کہلاتی ہے۔ اگر $x = a$, $a \in R$ ہو تو $P(x)$ کی قیمت $P(a)$ ہو گی۔

مثال کے طور پر:

اگر $P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ ہو تو $P(x)$ کی قیمت معلوم کریں۔ اگر (i) $x = 1$, (ii) $x = 2$

$P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5x + 1$

(i) $P(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 + 5(1) + 1$

$= 4 + 3 + 5 + 1$

$= 13$ لہذا

$P(1) = 13$ اور

(ii) $P(2) = 4(2)^3 + 3(2)^2 + 5(2) + 1$

$= 32 + 12 + 10 + 1 = 55$

$P(2) = 55$ پس

مثال 1:-

اگر $P(x) = 4x^4 + 3x^2 - 5x + 1$ ہوتو $P(-1)$ معلوم کریں۔

حل: چونکہ $P(x) = 4x^4 + 3x^2 - 5x + 1$

$$P(-1) = 4(-1)^4 + 3(-1)^2 - 5(-1) + 1$$
$$= 4 + 3 + 5 + 1$$
$$= 13$$

مثال 2:-

اگر $P(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 8}$ ہوتو $P(1)$ معلوم کریں۔

حل:

$$P(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 8}$$

$$P(1) = \frac{1^2 - 5(1) + 6}{1^3 + 8} = \frac{1 - 5 + 6}{1 + 8}$$

$$= \frac{2}{9}$$

مشق 1.1

حل کریں۔

-1 اگر $P(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 9$ ہوتو $x = 0$ اور $x = 1$ کے لیے $P(x)$ کی قیمت معلوم کریں۔

-2 اگر $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ ہوتو $P(-2)$ معلوم کریں۔

-3 اگر $P(y) = 3y^2 + \dfrac{y}{4} + 9$ ہوتو $P(0)$ معلوم کریں۔

-4 اگر $P(x) = 9x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ ہوتو $P(1)$ اور $P(2)$ معلوم کریں۔

-5 اگر $P(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x + 1}$ ہو $P(1)$ اور $P(2)$ معلوم کریں۔

-6 اگر $P(r) = 2\pi r$ ہوتو $r = 3$ اور $\pi = \dfrac{22}{7}$ کے لیے $P(r)$ معلوم کریں۔

-7 اگر $P(r) = 4\pi r^2$ ہوتو $r = 8$ اور $\pi = \dfrac{22}{7}$ کے لیے $P(r)$ معلوم کریں۔

-8 اگر $P(y) = y^4 + \dfrac{3y^3}{2} - y^2 + 1$ ہوتو $y = 2$ اور $y = -2$ کے لیے $P(y)$ معلوم کریں۔

دیے گئے ناطق جملوں کوان کی مختصر ترین شکل میں تبدیل کیجیے۔

9- $\dfrac{8x^2y^2}{12x^4y}$

10- $\dfrac{25a^3b^2}{14a^2b^4}$

11- $\dfrac{16a^6b^7}{12a^3b^5+20a^5b^4}$

12- $\dfrac{18m^5x^3}{27m^4x^8-36m^6x^6}$

13- $\dfrac{5c-5d}{c^2-d^2}$

14- $\dfrac{x^2-y^2}{3y-3x}$

مختصر کیجیے۔

15- $\dfrac{x}{x-y}+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

16- $\dfrac{x^2+2x}{x^2+x-2}+\dfrac{3x}{x+1}$

17- $\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}-\dfrac{x-5}{x^2-x-6}$

18- $\dfrac{8x^2+18y^2}{4x^2-9y^2}-\dfrac{2x+3y}{2x-3y}$

19- $\dfrac{x}{x^2+xy}-\dfrac{y}{x^2-y^2}$

20- $\dfrac{x+y}{xy+y^2}-\dfrac{x}{x^2-xy}$

21- $\dfrac{(x+1)^2}{x^2-1}-\dfrac{x^2+1}{x^2+1}$

22- $\dfrac{5x}{x-9}+\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-12x+27}-\dfrac{6x}{x-3}$

23- $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}\div\dfrac{x}{x-2}$

24- $\dfrac{x^2-36}{x^2-1}\div\dfrac{x-6}{1-x}$

25- $\dfrac{x^2-5x}{x-1}\div\dfrac{x^2-25}{x^2+x+20}$

26- $\dfrac{2x^2-5x-12}{4x^2+4x-3}\div\dfrac{2x^2-7x-4}{6x^2+5x-4}$

27- $\dfrac{x(2x-1)^2}{2x^2-1}\div\dfrac{4x^2-1}{4x^2+4x+1}$

28- $\dfrac{x^2+x}{x^2-1}\times\dfrac{x+1}{x^3+1}$

29- $\dfrac{x^2-9}{x^2-6x+9}\times\dfrac{x}{3x+9}$

30- $\dfrac{x+5}{x^2+6x}\times\dfrac{x^3+6x^2}{x+5}$

31- $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}\times\dfrac{x+1}{x-1}$

32- $\dfrac{x^2+4x+3}{x+3}\times\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

1.2 کُلیے FORMULAE

ایک کلیہ، الجبری شکل میں ایک قانون کوظاہرکرتا ہے جبکہ کُلیے اس کی جمع ہیں۔

1.2.1- کلیہ 1

$$(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} L.H.S &= (a+b)^2+(a-b)^2 \\ &= a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2 \\ &= 2a^2+2b^2 \\ &= 2(a^2+b^2) \\ &= R.H.S \end{aligned}$$

کلیہ 2

$$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$$

ثبوت:

$$\begin{aligned} L.H.S &= (a+b)^2-(a-b)^2 \\ &= (a^2+2ab+b^2)-(a^2-2ab+b^2) \\ &= a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2 \\ &= 4ab \\ &= R.H.S \end{aligned}$$

مثال 1:-

a^2+b^2 کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a+b = 8$ اور $ab = 12$

حل:

چونکہ $a+b = 8$

دونوں اطراف مربع لینے سے $(a+b)^2 = (8)^2$

$$\begin{aligned} a^2+2ab+b^2 &= 64 \\ a^2+b^2 &= 64-2ab \\ &= 64-2(12) \quad \because ab = 12 \\ &= 64-24 \\ a^2+b^2 &= 40 \end{aligned}$$

علامت "$\because$" کا مطلب ہے کیونکہ

مثال 2:-

ab کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a + b = 9$ اور $a - b = 3$

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$
$$(9)^2 - (3)^2 = 4ab$$
$$81 - 9 = 4ab$$
$$4ab = 72$$
$$ab = \frac{72}{4}$$
$$ab = 18$$

1.2.2- کلیہ 3

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

فرض کیا $p = a + b$

$$L.H.S = (a+b+c)^2 = (p+c)^2$$
$$= p^2 + 2pc + c^2$$
$$= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 \quad (\text{یہاں } p = a+b)$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
$$= R.H.S$$

مثال 3:-

$a^2 + b^2 + c^2$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a + b + c = 12$ اور $ab + bc + ca = 8$

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$
$$(12)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(8)$$
$$144 = a^2 + b^2 + c^2 + 16$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 128$$

مثال 4:-

$a+b+c$ کی قیمت معلوم کیجیے جبکہ $a^2+b^2+c^2 = 100$ اور $ab+bc+ca = 22$ ہو

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$
$$= (a^2+b^2+c^2)+2(ab+bc+ca)$$
$$= 100+2(22)$$
$$= 100+44$$
$$(a+b+c)^2 = 144$$
$$(a+b+c)^2 = (12)^2$$
$$a+b+c = \pm 12$$

نتائج

(i) $x^2 = a^2$
$x = \pm a$

(ii) $x^2 = a$
$x = \pm\sqrt{a}$

مثال 5:-

$ab+bc+ca$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a^2+b^2+c^2 = 36$ اور $a+b+c = 8$ ہو

حل:- ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$
$$8^2 = 36+2(ab+bc+ca)$$
$$64-36 = 2(ab+bc+ca)$$
$$2(ab+bc+ca) = 28$$
$$ab+bc+ca = \frac{28}{2}$$ (دونوں اطراف کو 2 پر تقسیم کرنے سے)
$$ab+bc+ca = 14$$

1.2.3- کلیہ 4

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$$L.H.S = (a+b)^3$$

$$= (a+b)^2 \ (a+b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2)\ (a+b)$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$$= R.H.S$$

کلیہ 5

$$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$$

$$L.H.S = (a-b)^3$$

$$= (a-b)^2 \ (a-b)$$

$$= (a^2 - 2ab + b^2)\ (a-b)$$

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \qquad (\because ab^2 = b^2a)$$

$$= a^3 - 3ab(a-b) - b^3$$

$$= R.H.S$$

کلیہ 6

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$R.H.S = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$= a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3$$

$$= a^3+b^3$$

$$= L.H.S$$

کلیہ 7

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$R.H.S = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$= a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$$

$$= a^3-b^3$$

$$= L.H.S$$

مثال 6:-

x^3+y^3 کی قیمت معلوم کریں جبکہ $xy = 8$ اور $x+y = 5$

حل:

$$x+y = 5$$

$(x+y)^3 = (5)^3$ (دونوں اطراف کا مکعب لینے سے)

$$x^3+y^3+3xy(x+y) = 125$$

$x^3+y^3+3(8)(5) = 125$ ($xy = 8$ اور $x+y = 5$ رکھنے سے)

$$x^3+y^3+120 = 125$$

$$x^3+y^3 = 125-120$$

$$\therefore x^3+y^3 = 5$$

مثال 7:-

$a^3 - b^3$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a - b = 6$ اور $ab = 7$

حل:

$$a - b = 6$$

$$(a-b)^3 = (6)^3 \quad \text{(دونوں اطراف کا مکعب لینے سے)}$$

$$a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = 216$$

$$a^3 - b^3 - 3(7)(6) = 216$$

$$a^3 - b^3 - 126 = 216$$

$$a^3 - b^3 = 216 + 126$$

$$a^3 - b^3 = 342$$

مثال 8:-

$x^3p^2 - 8y^3p^2 - 4x^3q^2 + 32y^3q^2$ کے اجزائے ضربی بنایئے۔

حل:

$$x^3p^2 - 8y^3p^2 - 4x^3q^2 + 32y^3q^2 \quad \text{(رقوم کی ترتیب بدلنے سے)}$$

$$= p^2(x^3 - 8y^3) - 4q^2(x^3 - 8y^3)$$

$$= (p^2 - 4q^2)(x^3 - 8y^3)$$

$$= \left[(p)^2 - (2q)^2\right]\left[(x)^3 - (2y)^3\right]$$

$$= (p-2q)\,(p+2q)\,(x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

مثال 9:-

$64x^6 - 729y^6$ کے اجزائے ضربی بنایئے۔

حل:

$$64x^6 - 729y^6 = 2^6x^6 - 3^6y^6$$

$$= (2x)^6 - (3y)^6$$

$$= \left[(2x)^3\right]^2 - \left[(3y)^3\right]^2$$

$$= \left[(2x)^3 - (3y)^3\right]\left[(2x)^3 + (3y)^3\right]$$

$$= (2x-3y)\left[4x^2 + 6xy + 9y^2\right](2x+3y)\left[4x^2 - 6xy + 9y^2\right]$$

علامت " ∴ " کا مطلب ہے "لہٰذا"

مثال 10:-

$(x+y)^3+64$ کے اجزائے ضربی بنایئے۔

حل:

$$(x+y)^3+64$$
$$=(x+y)^3+(4)^3$$
$$=(x+y+4)\left[(x+y)^2-(x+y)4+(4)^2\right]$$
$$=(x+y+4)\left[x^2+y^2+2xy-4x-4y+16\right]$$

مثال 11:-

x^6-y^6 مسلسل حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل:

$$x^6-y^6$$
$$=(x^3)^2-(y^3)^2$$
$$=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$$
$$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$$
$$=(x+y)(x-y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$$

مشق 1.2

درج ذیل سوالات فارمولوں کی مدد سے حل کریں۔

1. $(x+2y)^2+(x-2y)^2$
2. $(5x+3y)^2+(5x-3y)^2$
3. $(3l+2m)^2-(3l-2m)^2$
4. $(l+m)(l-m)(l^2+m^2)(l^4+m^4)$

.5 $(ab-\frac{1}{ab})^3$　　.6 $(2x+3y+2)^2$

.7 $(2p+q)^3$　　.8 $(3p+q+r)^2$

.9 $(2x+3y)^3$　　.10 $(x+y)^3-1$

.11 $(x-y)^3+64$　　.12 $8x^3+27y^3$

.13 x^6-729y^6　　.14 $64a^6-b^6$

.15 a^3-b^3 کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $a-b=4$ اور $ab=-5$

.16 ثابت کیجیے۔ $\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=4$

.17 a^2+b^2 اور ab کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $a+b=5$ اور $a-b=3$

.18 $a^2+b^2+c^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $a+b+c=6$ اور $ab+bc+ca=11$

.19 x^3+y^3 کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $x+y=7$ اور $xy=10$

.20 $(x-y)^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $xy=-16$ اور $x^2+y^2=86$

.21 $ab+bc+ca$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $a+b+c=11$ اور $a^2+b^2+c^2=81$

.22 $(a+b+c)^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔ جبکہ $ab+bc+ca=7$ اور $a^2+b^2+c^2=32$

1.3 مقادیراصم اوران کا اطلاق SURDS AND THEIR APPLICATIONS

1.3.1 مقادیراصم Surds

ناطق اعداد: Rational Numbers

ایک عدد جس کو $\left(\frac{p}{q}\right)$ کی شکل میں بیان کیا جاسکے جبکہ 'p, q' صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ناطق عدد کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $\frac{3}{4}, \frac{2}{1}, \frac{8}{7}, \frac{-2}{5}$ تمام ناطق اعداد ہیں۔

غیر ناطق اعداد: Irrational Numbers

ایک حقیقی عدد جو کہ ناطق عدد نہ ہو غیر ناطق عدد کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ وغیرہ تمام غیر ناطق اعداد ہیں۔

صاف ظاہر ہے کہ ایک غیر ناطق عدد کو $\left(\frac{p}{q}\right)$ کی شکل میں بیان نہیں کیا جاسکتا جبکہ p, q صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$

حقیقی اعداد: Real Numbers

دو غیر مشترک ناطق اعداد کے سیٹ Q اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ Q' کا یونین حقیقی اعداد کا سیٹ کہلاتا ہے۔

جذر کی علامت والی مقادیراصم: Surds of Radicals

جذر کی علامت پر مشتمل غیر ناطق عدد کو مقادیراصم کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر: $\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 4+3\sqrt{5}, 10-4\sqrt{6}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{9}{\sqrt{7}}$ تمام کی تمام مقادیراصم ہیں۔

مثال:

(i) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ درجہ 2 کی مقادیراصم ہے۔

(ii) $\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}}$ درجہ 3 کی مقادیراصم ہے۔

(iii) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ درجہ n کی مقادیراصم ہے۔ 'a' کو مجذور کہتے ہیں۔

جذر کے قوانین Laws of Radicals

جیسا کہ مقدار اصم کو ناطق قوت نما میں لکھا جا سکتا ہے۔ لہذا قوت نما کے قوانین کا بھی مقادیر اصم پر اطلاق ہوتا ہے۔
پس کسی بھی مثبت صحیح عدد 'n' اور مثبت ناطق اعداد 'a' اور 'b' کے لیے، ہمارے پاس درج ذیل قوانین ہیں۔

قوت نما کے قوانین	جذر کے قوانین
(i) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$	(i) $(\sqrt[n]{a})^n = a$
(ii) $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\ b^{\frac{1}{n}}$	(ii) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$
(iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$	(iii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
(iv) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$	(iv) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

اصل مقادیر اصم: Pure Surds

ایسی مقدار اصم جس کا جز وضربی صرف '1' ہو اور دوسرا جز وضربی غیر ناطق ہو۔ اصل مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مثال: $\sqrt{2},\ \sqrt{11},\ \sqrt[4]{3}$ خالص مقادیر اصم ہیں۔

مخلوط مقادیر اصم: Mixed Surds

ایسی مقدار اصم جس کا '1' کے علاوہ کوئی اور ناطق جز وضربی ہو اور دوسرا جز وضربی غیر ناطق ہو، مخلوط مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مثال: $2\sqrt{3},\ 5\sqrt{7}$ مخلوط مقادیر اصم ہیں۔

1.3.2 دوسرے درجہ کی مقادیر اصم : Surds of Second Order

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ایک ایسی مقدار اصم ہے جس کا مرتبہ 2 ہے یعنی کہ دو درجی مقدار اصم۔

یاد رکھیے:
علامت $\sqrt{\ }$ جذر کی علامت ہے جس کا انڈیکس 2 ہے۔

مشابہ مقادیر اصم : Similar Surds

ایسی مقادیر اصم جن میں غیر ناطق جزوضربی ایک جیسا ہو مشابہ مقادیر اصم کہلاتی ہیں۔
$\sqrt{3},\ 5\sqrt{3},\ \frac{1}{7}\sqrt{3}$ مشابہ مقادیر اصم ہیں۔

ایسی مقادیر اصم جن کے غیر ناطق جزوضربی مختلف ہوں۔ مختلف مقادیر اصم کہلاتی ہیں۔

$\sqrt{2},\ 3\sqrt{5},\ 2\sqrt{3}$ مختلف مقادیر اصم ہیں۔

مقادیر اصم کی جمع اور تفریق : Addition and Subtraction of Surds

مشابہ مقادیر اصم کی جمع اور تفریق کی جاسکتی ہیں۔

مثال:

(i) $6\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (6+5)\sqrt{5} = 11\sqrt{3}$

(ii) $12\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = (12+4-6)\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$

مقادیر اصم کی ضرب اور تقسیم : Multiplication and Division of Two Surds

ایک ہی درجہ کی مقادیر اصم کو درج ذیل قوانین کے تحت ضرب دی جاسکتی ہے اور تقسیم کیا جاسکتا ہے۔
کسی بھی قدرتی اعداد 'm' اور 'n' کے لیے

(i) $\sqrt{m} \times \sqrt{n} = \sqrt{mn}$ (ii) $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}}$

مثال 1: $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ کو مختصر کریں۔

حل: قانون "$\sqrt{m} \times \sqrt{n} = \sqrt{mn}$" کے مطابق

$$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$$

مثال 2:-

$\sqrt{180} \div \sqrt{24}$ کو مختصر کریں۔

حل:

$$\sqrt{180} \div \sqrt{24} = \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{180}{24}} \quad \left[\text{کے مطابق } \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}}\right]$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times \cancel{3} \times 3 \times 5}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times \cancel{3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{15}{2}}$$

مخرج کو ناطق بنانا: Rationalizing The Denominator

ہم کسی کسر کو اس کے مخرج میں جذر کی علامت ختم کر کے مختصر کر سکتے ہیں۔ ہم ایسا کرنے کے لیے مخرج اور شمار کنندہ دونوں کو اس جذری رقم سے ضرب دیتے ہیں۔ یہ عمل مخرج کو ناطق بنانا کہلاتا ہے۔

مثال 1:- درج ذیل کو مختصر کریں۔

$(a)\ \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (b)\ \frac{5}{7\sqrt{2}}$

حل: (a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ کو $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ سے ضرب دیں۔

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(b) $\frac{5}{7\sqrt{2}}$ کو $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ سے ضرب دیں۔

$$\frac{5}{7\sqrt{2}} = \frac{5}{7\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{7 \times 2} = \frac{5\sqrt{2}}{14}$$

مثال 2:-

$(2+\sqrt{3})\ (5-\sqrt{3})$ کو ضرب دیں۔

حل: $(2+\sqrt{3})\ (5-\sqrt{3})$

$$= 2\times 5+2\times(-\sqrt{3})+5\times\sqrt{3}+\sqrt{3}(-\sqrt{3})$$

$$= 10-2\sqrt{3}+5\sqrt{3}-3$$

$$= 7+3\sqrt{3}$$

مثال 3:- ضرب دیں۔

$(3\sqrt{5}-5\sqrt{2})(4\sqrt{5}+3\sqrt{2})$

حل: $(3\sqrt{5}-5\sqrt{2})\ (4\sqrt{5}+3\sqrt{2})$

$$= 12(\sqrt{5})^2+9\sqrt{5}\sqrt{2}-20\sqrt{2}\sqrt{5}-15(\sqrt{2})^2$$

$$= 12\times 5+9\sqrt{10}-20\sqrt{10}-15\times(2)$$

$$= 60-30-11\sqrt{10}$$

$$= 30-11\sqrt{10}$$

مثال 4:-

مختصر ترین شکل میں لکھیے۔

(i) $\sqrt{288}$ (ii) $\sqrt{147}$ (iii) $\sqrt{36a^3}$

حل:

(i) $\sqrt{288}$

2	288
2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

$$= \sqrt{2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 3}$$

$$= \sqrt{2\times 2}\times\sqrt{2\times 2}\times\sqrt{3\times 3}\times\sqrt{2}$$

$$= 2\times 2\times 3\times\sqrt{2}$$

$$= 12\sqrt{2}$$

(ii) $\sqrt{147}$

7	147
7	21
3	3
	1

$$= \sqrt{7\times 7\times 3}$$

$$= \sqrt{7\times 7}\times\sqrt{3}$$

$$= 7\sqrt{3}$$

(iii) $\sqrt{36a^3}$

$$= \sqrt{6\times 6\times a\times a\times a}$$

$$= \sqrt{6\times 6}\times\sqrt{a\times a}\times\sqrt{a}$$

$$= 6\times a\times\sqrt{a}$$

$$= 6a\sqrt{a}$$

1.4 ناطق بنانا: RATIONALIZATION

دورقمی مقدار اصم: Binomial Surd

ایک ایسا دورقمی جملہ جس میں کم از کم ایک رقم مقدار اصم ہو۔ دورقمی مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مثلاً $a + b\sqrt{x},\ \sqrt{x} + \sqrt{y}$ دورقمی مقادیر اصم ہیں۔

دورقمی مقادیر اصم کا کانجوگیٹ: Conjugate of Binomial Surds

(i) $a + b\sqrt{x}$ اور $a - b\sqrt{x}$

(ii) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ اور $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

درج بالا ایسی مقادیر اصم کے جوڑے ہیں جن کا حاصل ضرب ایک ناطق جملہ ہے۔ مقادیر اصم کا ایسا جوڑا دورقمی مقادیر اصم کا کانجوگیٹ کہلاتا ہے۔ جبکہ ان میں سے ہر ایک دوسرے کا کانجوگیٹ کہلاتا ہے۔

(i) $2 + 3\sqrt{5}$ کی کانجوگیٹ مقدار اصم $2 - 3\sqrt{5}$ ہے۔

(ii) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ کی کانجوگیٹ مقدار اصم $\sqrt{3} - \sqrt{7}$ ہے۔

یاد رکھیے کہ: دورقمی کانجوگیٹ ایک دوسرے کے ناطق ساز جزوضربی کہلاتے ہیں۔

جزوناطق Rationalizing Factor

جب دو مقادیر اصم کا حاصل ضرب ایک ناطق جملہ ہو تو وہ دونوں ایک دوسرے کا جزوناطق ساز جزوضربی کہلاتے ہیں۔

مثال:-

(i) $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$ (جوکہ ناطق ہے)

$2\sqrt{3}$ ، $\sqrt{3}$ کا ناطق ساز جزوضربی ہے

(ii) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$ (جوکہ ایک ناطق ہے)

لہٰذا $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ اور $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ ایک دوسرے کے ناطق ساز جزوضربی ہیں۔

مقادیر اصم کو ناطق بنانا: Rationalization of Surds

کسی مقدار اصم کو مناسب ناطق ساز جزو سے ضرب دے کر اسے ناطق عدد میں تبدیل کرنے کا عمل مقدار اصم کو ناطق بنانا کہلاتا ہے۔

مثال 1:-

$\dfrac{1}{5+2\sqrt{3}}$ کے مخرج کو ناطق بنائیے۔

حل:-

$$\frac{1}{5+2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{5+2\sqrt{3}} \times \frac{5-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5-2\sqrt{3}}{5^2-(2\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{5-2\sqrt{3}}{25-12} = \frac{5-2\sqrt{3}}{13}$$

مثال 2:-

$\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ کے مخرج کو ناطق بنایے۔

حل:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

مثال 3:-

اگر $x = 3+\sqrt{8}$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

(i) $\frac{1}{x}$ (ii) $x+\frac{1}{x}$ (iii) $x-\frac{1}{x}$ (iv) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

(v) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ (vi) $x^2+\frac{1}{x^2}$ (vii) $x^2-\frac{1}{x^2}$

حل:

(i) $$\frac{1}{x} = \frac{1}{3+\sqrt{8}}$$

$$= \frac{1}{3+\sqrt{8}} \times \frac{3-\sqrt{8}}{3-\sqrt{8}}$$

$$= \frac{3-\sqrt{8}}{(3)^2-(\sqrt{8})^2} = \frac{3-\sqrt{8}}{9-8}$$

$$= 3-\sqrt{8}$$

(ii) $$x+\frac{1}{x}$$

$$= (3+\sqrt{8})+(3-\sqrt{8})$$

$$= 3+\cancel{\sqrt{8}}+3-\cancel{\sqrt{8}}$$

$$= 6$$

(iii) $$x-\frac{1}{x}$$

$$= (3+\sqrt{8})-(3-\sqrt{8})$$

$$= \cancel{3}+\sqrt{8}-\cancel{3}+\sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{8}$$

(iv) $(x+\frac{1}{x})^2$

$$(x+\frac{1}{x})^2 = 6^2 \qquad (\text{ سے } (ii))$$

$$(x+\frac{1}{x})^2 = 36$$

(v) $(x-\frac{1}{x})^2$

$$(x-\frac{1}{x})^2 = (2\sqrt{8})^2 \qquad (\text{ سے } (iii))$$

$$(x-\frac{1}{x})^2 = 32$$

(vi) $x^2+\frac{1}{x^2}$

$$= x^2+\frac{1}{x^2}+2-2$$

$$= (x^2+\frac{1}{x^2}+2)-2$$

$$= (x+\frac{1}{x})^2-2$$

$$= 36-2 \qquad (\text{ سے } (iv))$$

$$= 34$$

(vii) $x^2-\frac{1}{x^2}$

$$= (x+\frac{1}{x})(x-\frac{1}{x}) = 6(2\sqrt{8}) \qquad (\text{ سے } (ii, iii))$$

$$= 12\sqrt{8}$$

مشق 1.3

.1 مخرج سے جذری علامت دور کیجیے۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{7}{\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

.2 درج ذیل جملوں کو مختصر کریں۔

(i) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ (ii) $4\sqrt{50}+\sqrt{200}+\sqrt{50}$

(iii) $(\sqrt{12}-\sqrt{2})(\sqrt{20}-3\sqrt{2})$ (iv) $(6+\sqrt{2})(5-\sqrt{5})$

(v) $(\sqrt{3}-2)(5-\sqrt{5})$ (vi) $(7+\sqrt{3})(5+\sqrt{2})$

.3 درج ذیل کے مخارج کو ناطق بنایے۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{3}+2}$ (ii) $\frac{1}{4-\sqrt{5}}$ (iii) $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$ (iv) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

(v) $\frac{5\sqrt{7}}{2+3\sqrt{7}}$ (vi) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ (vii) $\frac{29}{11+3\sqrt{5}}$

(viii) $\frac{17}{3\sqrt{7}+2\sqrt{3}}$

.4 اگر $x=\sqrt{5}+2$ ہوتو (i) $x+\frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

.5 اگر $x=2+\sqrt{3}$ ہوتو (i) $x-\frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

.6 اگر $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ہوتو (i) $x-\frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2+\frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

.7 اگر $\frac{1}{x}=3-\sqrt{2}$ ہوتو (i) $x+\frac{1}{x}$ اور (ii) $x-\frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

.8 اگر $\frac{1}{p}=\sqrt{10}+3$ ہوتو (i) $(p+\frac{1}{p})^2$ اور (ii) $(p-\frac{1}{p})^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

.9 مخرج کو ناطق بنایے۔ (i) $\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{b-\sqrt{b^2-a^2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{a+3}-\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}+\sqrt{a-3}}$

جائزہ مشق-1

1- صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگائیے۔

.1 ایک $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی شکل کا الجبری جملہ جس میں $Q(x) \neq 0$ ہو جبکہ $P(x)$ اور $Q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں کہلاتا ہے۔

(a) ناطق عدد (b) ناطق جملہ
(c) مقدار اصم (d) مخلوط مقدار اصم

.2 $(a+b)^2-(a-b)^2=?$

(a) $2(a^2+b^2)$ (b) $4ab$
(c) $-4ab$ (d) a^2+b^2

.3 $(a+b)^2+(a-b)^2=?$

(a) $-4ab$ (b) a^2+b^2
(c) $4ab$ (d) $2(a^2+b^2)$

.4 $(a-b)(a^2+ab+b^2)=?$

(a) $(a-b)^3$ (b) $(a+b)^3$
(c) a^3-b^3 (d) a^3+b^3

.5 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=?$

(a) a^3-b^3 (b) $(a+b)^3$
(c) $(a-b)^3$ (d) a^3+b^3

.6 $a^3+3ab(a+b)+b^3=?$

(a) $(a+b)^3$ (b) $(a-b)^3$
(c) a^3+b^3 (d) a^3-b^3

.7 $a^3-3ab(a-b)-b^3=?$

(a) a^3+b^3 (b) $(a+b)^3$
(c) a^3-b^3 (d) $(a-b)^3$

.8 ایک غیر ناطق عدد جس میں جذر کی علامت ہو، کہلاتا ہے

(a) مخلوط مقدار اصم (b) مقدار اصم
(c) ناطق عدد (d) قدرتی عدد

9. مقدار اصم $\sqrt{a} = a^{1/2}$ کا درجہ ہے۔

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) ½

10. مقادیر اصم کو ضرب دی جا سکتی ہے اگر وہ ہوں۔

(a) یکساں درجہ کی
(b) دو درجی
(c) مختلف درجوں کی
(d) درجہ n کی

II- خالی جگہ پر کریں۔

1. ایک $\frac{p}{q}$ کی شکل کا عدد جس میں $q \neq 0$ اور $p, q \in Z$ ______________ کہلاتا ہے۔

2. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی شکل کا جملہ جس میں $Q(x) \neq 0$ اور $P(x), Q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں، ______________ کہلاتا ہے۔

3. $(a+b)^2 - (a-b)^2 =$ ______________

4. $(a+b)^2 + (a-b)^2 =$ ______________

5. $a^3 + 3ab(a+b) + b^3 =$ ______________

6. $a^3 - 3ab(a-b) - b^3 =$ ______________

7. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) =$ ______________

8. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) =$ ______________

9. ایک غیر ناطق عدد جس میں جذری علامت ہو کہلاتا ہے ______________

10. $\sqrt{a} = a^{1/2}$ ______________ درجہ کی مقدار اصم کہلاتی ہے۔

خلاصہ SUMMARY

کلیے: Formulae

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab(a \pm b) \pm b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

مقدار اصم: مقدار اصم ایک غیر ناطق جملہ ہے جس میں جذری علامت پائی جاتی ہے۔

خالص مقدار اصم: ایسی مقدار اصم جس میں '1' ایک ناطق جز وضربی ہو اور دوسرا اجز وضربی غیر ناطق ہو۔

مخلوط مقدار اصم: ایسی مقدار اصم جس میں '1' ایک کے علاوہ کوئی ناطق جز وضربی ہو جبکہ دوسرا اجز وضربی غیر ناطق ہو۔ مخلوط مقدار اصم کہلاتی ہے۔

مشابہ مقدار اصم: مقدار اصم جن کا یکساں غیر ناطق جز وضربی ہو، ہم شکل / یکساں مقادیر اصم کہلاتی ہیں۔

غیر مشابہ مقدار اصم: ایسی مقادیر اصم جن میں غیر ناطق اجزائے ضربی مختلف ہوں۔ مشابہ مقادیر اصم کہلاتی ہیں۔

ناطق ساز جز وضربی: دو ایسی مقادیر اصم کہ جن کا حاصل ضرب ایک ناطق عدد ہو تو دونوں ایک دوسرے کا ناطق ساز جز وضربی کہلاتی ہیں۔

یونٹ 2

تجزی FACTORIZATION

- تجزی
- مسئلہ باقی اور مسئلہ تجزی
- تین درجے والی کثیر رقمی کی تجزی

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- درج ذیل قسم کے جملوں کی تجزی کر سکیں۔
  - قسم I $kx + ky + kz$,
  - قسم II $ax + ay + bx + by$,
  - قسم III $a^2 \pm 2ab + b^2$,
  - قسم IV $a^2 - b^2$,
  - قسم V $(a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2$,
  - قسم VI $a^4 + a^2b^2 + b^2$ or $a^4 + 4b^4$,
  - قسم VII $x^2 + px + q$,
  - قسم VIII $ax^2 + bx + c$,
  - قسم IX $\begin{cases} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3, \end{cases}$
  - قسم X $a^3 \pm b^3$,
- مسئلہ باقی کا بیان اور اطلاق
- بغیر تقسیم کیے کسی کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقمی سے تقسیم کرنے کے بعد جو باقی بچا معلوم کر سکیں۔
- کسی کثیر رقمی میں صفر معلوم کر سکیں۔
- مسئلہ تجزی کا بیان اور مثالوں سے اس کی شناخت کر سکیں۔
- مسئلہ تجزی کے استعمال سے تین درجے والی کثیر رقمی کی تجزی معلوم کر سکیں۔

2.1 جملوں کی تجزی : FACTORIZATION OF EXPRESSIONS

یک درجی کثیر رقمی : Linear Polynomials

ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ '1' ہو، یک درجی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔ مثلاً $x + 3,\ 2x - 5$ وغیرہ۔ یک درجی کثیر رقمی کی عمومی شکل $ax + b$ ہے جبکہ a , b حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$۔

دو درجی کثیر رقمی : Quadratic Polynomials

ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ '2' ہو۔ دو درجی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔ مثلاً $4x^2 - 3x + 1\ ,\ 3x^2 + 5x - 2$ وغیرہ۔
دو درجی کثیر رقمی کی عمومی شکل $ax^2 + bx + c$ ہے۔ جبکہ a, b, c حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$۔

تین درجہ والی کثیر رقمی : Cubic Polynomials

ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ '3' ہو۔ تین درجے والی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔ مثلاً $4x^3 + 5x^2 - 2\ ,\ x^3 - 3x^2 + 5x + 2$ وغیرہ۔ تین درجے والی کثیر رقمی کی عمومی شکل $ax^3 + bx^2 + cx + d$ ہوتی ہے۔ جبکہ a, b, c, d حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$۔

اگر $P(x)$ کوئی کثیر رقمی ہو اور c, b, a کوئی حقیقی اعداد ہوں جبکہ $P(x) = (x-a)\ (x-b)\ (x-c)$ ہو تو صاف ظاہر ہے کہ $(x-a), (x-b), (x-c)$ ہر ایک $P(x)$ کا یک درجی جز وضربی ہے۔

کسی بھی کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقموں کے حاصل ضرب یا اس کثیر رقمی کے درجہ سے کم درجہ والی کثیر رقموں کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھنے کے عمل کو تجزی کرنا کہتے ہیں

ہم جانتے ہیں کہ $3 \times 5 = 15$ میں $(3,5)$ 15 کے اجزائے ضربی کہلاتے ہیں۔ اس طرح $ax + ay = a(x + y)$ میں $a, (x + y)$, $ax + ay$ کے اجزائے ضربی کہلاتے ہیں اور $ax + ay + az = a(x + y + z)$ میں a اور $(x + y + z)$, $ax + ay + az$ کے اجزائے ضربی کہلاتے ہیں۔

کسی جملے کو اس کے اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی صورت میں لکھنے کے عمل کو تجزی کرنا کہتے ہیں۔
ہم مختلف قسم کے جملوں کی تجزی کرتے ہیں۔

$kx + ky + kz$ کی شکل کے جملوں کی اجزائے ضربی

درج ذیل مثالوں سے اس قسم کے جملوں کی اجزائے ضربی کی وضاحت ہوگی۔

مثال 1:-

درج ذیل کے اجزائے ضربی بنایئے۔

(i) $3x + 12y$ (ii) $x^2 + xy$ (iii) $ad + dc + df$

(iv) $2pq + 6p^2q - 4p^3q$

حل:

(i) $3x + 12y = 3(x + 4y)$

(ii) $x^2 + xy = x(x + y)$

(iii) $ad + dc + df = d(a + c + f)$

(iv) $2pq + 6p^2q - 4p^3q = 2pq(1 + 3p - 2p^2)$

$ax + ay + bx + by$ کی قسم کے جملوں کی اجزائے ضربی

درج ذیل مثالوں سے اس قسم کے جملوں کی اجزائے ضربی کی وضاحت ہوگی۔

مثال 2:-

درج ذیل جملوں کی اجزائے ضربی کیجیے۔

(i) $2ax + bx + 6ay + 3by$ (ii) $2yx + 18y^2 - 3zx + 27zy$

(iii) $5ym + 15yn + 2zm + 6zn$

حل:

(i) $2ax + bx + 6ay + 3by$

$= x(2a + b) + 3y(2a + b)$

$= (2a + b)(x + 3y)$

ہم پڑتال کرتے ہیں۔ $(2a + b)(x + 3y) = 2ax + bx + 6ay + 3by$

(ii) $2yx + 18y^2 + 3zx + 27zy$

$= 2y(x + 9y) + 3z(x + 9y)$

$= (2y + 3z)(x + 9y)$

(iii) $5ym + 15yn + 2zm + 6zn$

$= 5y(m + 3n) + 2z(m + 3n)$

$= (5y + 2z)(m + 3n)$

$a^2 \pm 2ab + b^2$ کی شکل کے جملوں کی اجزائے ضربی

ہم جانتے ہیں کہ

$$(i)\quad a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$
$$(ii)\quad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

(i) اور (ii) کی بائیں جانب کے جملے مکمل مربع کہلاتے ہیں۔ یہ فارمولے، کچھ جملوں کی تجزی کرنے میں معاون ثابت ہوتے ہیں۔ درج ذیل مثالیں ایسے جملوں کی تجزی کی وضاحت کریں گی۔

مثال 3:-

درجہ ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $x^2 + 6x + 9$ (ii) $t^2 - 12t + 36$

حل:

$$(i)\quad x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2(3)(x) + 3^2 = (x+3)^2$$
$$(ii)\quad t^2 - 12t + 36 = t^2 - 2(6)(t) + 6^2 = (t-6)^2$$

$a^2 - b^2$ کی قسم کے جملوں کی تجزی معلوم کرنا۔

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ یہ دو مربعوں کا فرق کہلاتا ہے۔

درج ذیل مثالیں ایسے جملوں کی تجزی کی وضاحت کریں گی۔

مثال 4:-

درجہ ذیل کی تجزی کریں۔

(i) $k^2 - 81$ (ii) $9a^2 - (b+c)^2$

حل:

$$(i)\quad k^2 - 81 = k^2 - 9^2 = (k+9)(k-9)$$
$$(ii)\quad 9a^2 - (b+c)^2 = (3a)^2 - (b+c)^2$$
$$= [3a + (b+c)]\,[3a - (b+c)]$$
$$= [\,3a + b + c\,]\,[\,3a - b - c\,]$$

مثال 5:- تجزی کیجیے۔ $36d^2 - 1$

حل:

$$36d^2 - 1 = (6d)^2 - (1)^2$$
$$= (6d + 1)(6d - 1)$$

مشق 2.1

تجزی کیجیے۔

1- $3a(x + y) - 7b(x + y)$

2- $ax + ay - x^2 - xy$

3- $a^3 + a - 3a^2 - 3$

4- $x^3 + y - xy - x$

5- $3ax + 6ay - 8by - 4bx$

6- $2a^2 - bc - 2ab + ac$

7- $a(a - b + c) - bc$

8- $8 - 4a - 2a^3 + a^4$

9- $16x^2 - 24xa + 9a^2$

10- $1 - 14x + 49x^2$

11- $20x^2 + 5 - 20x$

12- $2a^3b + 2ab^3 - 4a^2b^2$

13- $x^2 + x + \frac{1}{4}$

14- $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$

15- $5x^3 - 30x^2 + 45x$

16- $a^2 + b^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

(i) $(a^2 + 2ab + b^2) - c^2$

(ii) $(a^2 - 2ab + b^2) - c^2$ کی قسم کے جملوں کی اجزائے ضربی

ان جملوں کی تجزی کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے ہوگی۔

مثال 1:-

تجزی کیجیے۔ $x^2 + 2xy + y^2 - 4z^2$

حل:

$$(x^2 + 2xy + y^2) - 4z^2$$
$$= (x + y)^2 - (2z)^2$$
$$= (x + y - 2z)\ (x + y + 2z)$$

مثال 2:-

اجزائے ضربی کی صورت میں لکھیے۔ $c^2 + 6bc + 9b^2 - 16x^2$

حل:

$$(c^2 + 6bc + 9b^2) - 16x^2$$
$$= (c + 3b)^2 - (4x)^2$$
$$= (c + 3b + 4x) \quad (c + 3b - 4x)$$

مثال 3:-

تجزی کیجیے۔

(i) $a^2 - 2ab + b^2 - 9c^2$

(ii) $x^2 - 6xy + 9y^2 - 4z^2$

حل:

$$\text{(i)}\ a^2 - 2ab + b^2 - 9c^2 = a^2 - 2ab + b^2 - 9c^2$$
$$= (a - b)^2 - (3c)^2$$
$$= (a - b - 3c)(a - b + 3c)$$

$$\text{(ii)}\ x^2 - 6xy + 9y^2 - 4z^2 = x^2 - 2(3)xy + 9y^2 - 4z^2$$
$$= (x - 3y)^2 - (2z)^2$$
$$= (x - 3y - 2z)(x - 3y + 2z)$$

(i) $a^4 + a^2b^2 + b^4$

کی شکل کے جملوں کی تجزی (ii) $a^4 + 4b^4$

مثال 4:-

تجزی کیجیے۔ $x^4 + x^2 + 1$

حل:

$$x^4 + x^2 + 1 = x^4 + x^2 + 1 + x^2 - x^2$$
$$= (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$$
$$= (x^2 + 1)^2 - x^2$$
$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

مثال 5:-

تجزی کیجیے۔ x^4+64

حل:

$$x^4+64 = (x^2)^2+8^2+2(8)x^2-2(8)x^2$$
$$= (x^2+8)^2-16x^2$$
$$= (x^2+8)^2-(4x)^2$$
$$= (x^2+8+4x)(x^2+8-4x)$$

مثال 6:-

اجزائے ضربی لکھیے۔ $x^4+x^2y^2+y^4$

حل:-

$$x^4+x^2y^2+y^4 = (x^4+2x^2y^2+y^4)-x^2y^2$$
$$= (x^2+y^2)^2-(xy)^2$$
$$= (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$$

مشق 2.2

جزو ضربی بنایے۔

1. $x^2+2xy+y^2-a^2$
2. $4a^2+4ab+b^2-9c^2$
3. $x^2+6ax+9a^2-16b^2$
4. $y^2-c^2+2cx-x^2$
5. $x^2+y^2+2xy-4x^2y^2$
6. $a^2-4ab+4b^2-9a^2c^2$
7. $x^2-2xy+y^2-a^2+2ab-b^2$
8. y^4+4
9. z^4+64y^4
10. x^4+324
11. z^4-z^2+16
12. $4x^4-5x^2y^2+y^4$

$x^2 + px + q$ کی شکل کے جملوں کی تجزی

فرض کیا $x^2 + px + q = (x + r)\ (x + s)$

تب $x^2 + px + q = x^2 + (r + s)\,x + rs$

دونوں اطراف ایک جیسی رقموں کے عددی سروں کا موازنہ کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$r + s = p$ اور $rs = q$

پس $x^2 + px + q$ کی اجزائے ضربی لکھنے کے لیے ہمیں دو نمبروں 'r' اور 's' کی قیمت معلوم کرنا ہے۔ اس طرح کہ $r + s = p$ اور $rs = q$۔

درج ذیل مثالیں اسطرح کے جملوں کی تجزی کی وضاحت ہوگی۔

مثال:-

تجزی کیجیے۔

(i) $x^2 + 7x + 12$ (ii) $x^2 + 4x - 21$ (iii) $x^2 - 5x - 14$

حل:

(i) $x^2 + 7x + 12$ کی تجزی کرنے کے لیے ہمیں 'r' اور 's' کی قیمتیں معلوم کرنا ہوں گی۔ جبکہ

$r + s = 7$ اور $rs = 12$

صاف ظاہر ہے کہ $4 + 3 = 7$ اور $4 \times 3 = 12$

$$\therefore\ x^2 + 7x + 12 = x^2 + 4x + 3x + 12$$
$$= x(x + 4) + 3(x + 4)$$
$$= (x + 4)\ (x + 3)$$

(ii) $x^2 + 4x - 21$ کی جزوضربی لکھنے کے لیے ہمیں 'r' اور 's' کی قیمتیں معلوم کرنا ہوں گی جبکہ

$r + s = 4$ اور $rs = -21$

صاف ظاہر ہے کہ $7 + (-3) = 4$ اور $7(-3) = -21$

$$\therefore\ x^2 + 4x - 21 = x^2 + 7x - 3x - 21$$
$$= x(x + 7) - 3(x + 7)$$
$$= (x + 7)\ (x - 3)$$

(iii) $x^2 - 5x - 14$ کی اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے 'r' اور 's' کی قیمتیں معلوم کرنا ہوگی جبکہ

$r + s = -5$ اور $rs = -14$

صاف ظاہر ہے کہ $-7 \times 2 = -14$ اور $-7 + 2 = -5$

$$\therefore\ x^2 - 5x - 14 = x^2 - 7x + 2x - 14$$
$$= x(x-7) + 2(x-7)$$
$$= (x-7)(x+2)$$

$ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ شکل کے جملوں کی اجزائے ضربی معلوم کرنا۔

$ax^2 + bx + c$ کے شکل کے جملے کی تجزی کرنے کے لیے اعداد 'p' اور 'q' اسطرح سے معلوم کرتے ہیں۔ کہ $p + q = b$ اور $pq = ac$ جبکہ a, b, c مستقل مقداریں اور $a \neq 0$۔

مندرجہ ذیل مثالیں اسطرح کے جملوں کی تجزی کی وضاحت کریں گی۔

مثال:- تجزی کیجیے۔

(i) $6x^2 + 7x - 3$ (ii) $\sqrt{3}x^2 + 11x + 6\sqrt{3}$

حل:

(i) دیا گیا جملہ $6x^2 + 7x - 3$

$ax^2 + bx + c$ کی شکل میں ہے۔ $ac = 6 \times (-3) = -18$

$$\therefore\ 6x^2 + 7x - 3 = 6x^2 + 9x - 2x - 3$$
$$= 3x(2x+3) - 1(2x+3)$$
$$= (2x+3)(3x-1)$$

$6 \times (-3) = -18$
ممکن جوڑے
$18 \times (-1) = -18$
$(-18) \times (1) = -18$
$6 \times (-3) = -18$
$-6 \times 3 = -18$
$-9 \times 2 = -18$
$9 \times (-2) = -18$
منتخب شدہ جوڑے
$9 \times (-2) = -18$

(ii) $\sqrt{3}x^2 + 11x + 6\sqrt{3};\ ac = \sqrt{3} \times 6\sqrt{3} = 18$

صاف ظاہر ہے۔ $9 + 2 = 11$

$$\therefore\ \sqrt{3}x^2 + 11x + 6\sqrt{3} = \sqrt{3}x^2 + 9x + 2x + 6\sqrt{3}$$
$$= \sqrt{3}x\left[x + 3\sqrt{3}\right] + 2\left[x + 3\sqrt{3}\right]$$
$$= (\sqrt{3}x + 2)(x + 3\sqrt{3})$$

مشق 2.3

اجزائے ضربی بنایئے۔

1. $x^2+9x+20$
2. $x^2+5x-14$
3. x^2+5x-6
4. $x^2-7x+12$
5. $x^2-x-156$
6. x^2-x-2
7. $x^2-9x-90$
8. $a^2-12a-85$
9. $98-7x-x^2$
10. $y^2-11y-152$
11. $2x^2+3x+1$
12. $3x^2+5x+2$
13. $2x^2-x-1$
14. $6x^2+7x-3$
15. $2-3x-2x^2$
16. $8+6x-5x^2$
17. $3u^2-10u+8$
18. $10x^2-7x-12$
19. $5x^2-32x+12$
20. $4\sqrt{3}x^2+5x-2\sqrt{3}$

$\left\{\begin{matrix} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{matrix}\right\}$ کی شکل کے جملوں کی تجزی

ہم جانتے ہیں کہ

(i) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

(ii) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

درج ذیل مثالیں اس قسم کے جملوں کی تجزی کی وضاحت کریں گی۔

مثال:- تجزی کیجیے۔ (i) $x^3+6x^2+12x+8$ (ii) $x^3-6x^2+12x-8$

حل:

(i) $x^3+6x^2+12x+8 = (x)^3+3(2)(x)^2+3(2)^2x+(2)^3$

$= (x+2)^3$

(ii) $x^3-6x^2+12x-8 = (x)^3-3(2)(x)^2+3(2)^2x-(2)^3$

$= (x-2)^3$

$a^3 \pm b^3$ کی قسم کے جملوں کی تجزی

ہمیں معلوم ہے کہ

$$(i) \quad a^3 + b^3 = (a+b)\ (a^2 - ab + b^2)$$
$$(ii) \quad a^3 - b^3 = (a-b)\ (a^2 + ab + b^2)$$

مندرجہ ذیل مثالوں سے اس قسم کے جملوں کی وضاحت کریں گی۔

مثال 1:-

تجزی کیجیے۔

(i) $x^3 + 27$ (ii) $8a^3 - 125b^3$ (iii) $x^6 - y^6$ (iv) $a^3 - b^3 - a + b$

حل:

$$(i) \quad x^3 + 27 = x^3 + 3^3$$
$$= (x+3)\ (x^2 - 3x + 9)$$

$$(ii) \quad 8a^3 - 125b^3 = (2a)^3 - (5b)^3$$
$$= (2a - 5b)\ \left[(2a)^2 + (2a)\times(5b) + (5b)^2\right]$$
$$= (2a - 5b)\ \left[4a^2 + 10ab + 25b^2\right]$$

$$(iii) \quad x^6 - y^6 = (x^3)^2 - (y^3)^2$$
$$= (x^3 + y^3)\ (x^3 - y^3)$$
$$= (x+y)\ (x^2 - xy + y^2)\ (x-y)\ (x^2 + xy + y^2)$$
$$= (x+y)\ (x-y)\ (x^2 - xy + y^2)\ (x^2 + xy + y^2)$$

$$(iv) \quad a^3 - b^3 - a + b = (a^3 - b^3) - (a - b)$$
$$= (a-b)\ (a^2 + ab + b^2) - (a-b)$$
$$= (a-b)\ \left[a^2 + ab + b^2 - 1\right]$$

یاد رکھیے:

(i) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

(ii) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

(iii) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$

(iv) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

(v) $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$

(vi) $(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3$

مشق 2.4

تجزی کیجیے۔

1. $8x^3-y^3$
2. $27x^3+1$
3. $1-343x^3$
4. a^3b^3+512
5. $27-1000y^3$
6. $27x^3-64y^3$
7. $x^3y^3+z^3$
8. $216P^3-343$
9. $8x^3-\frac{1}{27}$
10. a^3+b^3+a+b
11. $a-b-a^3+b^3$
12. $x-8xy^3$
13. $x^{12}-y^{12}$
14. $1-\frac{64p^3}{q^3}$
15. $1+64U^3$
16. $8x^3-6x-9y+27y^3$
17. z^3+125
18. x^9+y^9
19. m^6-n^6
20. $64x^7-xa^6$
21. x^3-27a^3
22. x^3+27a^3

2.2 مسئلہ باقی اور مسئلہ تجزی:
REMAINDER THEOREM AND FACTOR THEOREM

ایک تفاعل (function) کو درج ذیل مساوات سے متعارف کرایا گیا ہے۔

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 \ , \ a_n \neq 0$$

جس میں 'n' ایک غیر منفی صحیح عدد ہے اور تمام عددی سر، مستقل مقداریں ہیں۔ ایسا تفاعل درجہ 'n' کی کثیر رقمی کہلاتا ہے۔

مثلاً

(i) $P(x) = a_1 x + a_0$ $\quad a_1 \neq 0$ (یک درجی کثیر رقمی تفاعل ہے)

(ii) $P(x) = 3x^2 + 5x + 11$ (دو درجہ کثیر رقمی تفاعل ہے)

(iii) $P(x) = 7x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 5x + 6$ (5 درجہ کثیر رقمی تفاعل ہے)

(iv) $P(x) = 5x^5 + \dfrac{7}{x} + 6 = 5x^2 + 7x^{-1} + 6$ (یہ تفاعل کثیر رقمی نہیں ہے)

مثال:-

$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x - 5$ کو $x + 2$ سے تقسیم کیجیے۔

حل:

حاصل قسمت ← $2x^3 - x^2 + 2x - 5$

تقسیم کنندہ → $x + 2$) $2x^4 + 3x^3 - x - 5$ ← مقسوم علیہ

$$\begin{array}{l}
\underline{\pm 2x^4 \pm 4x^3} \\
\quad -x^3 - x - 5 \\
\quad \underline{\mp x^3 \qquad \mp 2x^2} \\
\qquad 2x^2 - x - 5 \\
\qquad \underline{\pm 2x^2 \pm 4x} \\
\qquad\quad -5x - 5 \\
\qquad\quad \underline{\mp 5x \mp 10} \\
\qquad\qquad 5
\end{array}$$

باقی ← 5

یاد رکھیے کہ: مقسوم علیہ = تقسیم کنندہ × حاصل قسمت + باقی

2.2.1 مسئلہ باقی The Remainder Theorem

اگر کسی کثیر رقمی $P(x)$ کو $x - a$ پر تقسیم کرنے سے R باقی بچے تو $P(a) = R$

یا

اگر کثیر رقمی $P(x)$ جس کا درجہ $n \geq 1$ ہو تو $x - a$ سے تقسیم کیا جائے جبکہ $'a'$ ایک مستقل مقدار ہو تو باقی $P(a)$ ہوتا ہے۔ جبکہ اس میں x رکھنے والی رقم نہ بچے۔

مثال 1:-

اگر $P(x) = 4x^4 + 10x^3 + 19x + 5$ کو $x+3$ پر تقسیم کیا جائے تو باقی معلوم کریں۔

حل:

$$P(x) = 4x^4 + 10x^3 + 19x + 5$$

$$x - a = x + 3 \quad \Rightarrow \quad a = -3$$

لہٰذا
$$P(-3) = 4(-3)^4 + 10(-3)^3 + 19(-3) + 5$$
$$= 4 \times 81 - 10 \times 27 - 57 + 5$$
$$= 324 - 270 - 57 + 5$$
$$= -3 + 5$$

پس
$$P(-3) = 2$$

$$\boxed{R = 2}$$

مثال 2:-

اگر $P(x) = 5x^4 + 14x^3 + 3x^2 - 5x - 3$ کو $x - 1$ سے تقسیم کیا جائے تو باقی معلوم کریں۔

حل:

$$P(x) = 5x^4 + 14x^3 + 3x^2 - 5x - 3$$

$$x - a = x - 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

لہٰذا
$$P(1) = 5(1)^4 + 14(1)^3 + 3(1)^2 - 5(1) - 3$$
$$= 5 + 14 + 3 - 5 - 3$$
$$= 14$$

پس
$$P(1) = 14$$

$$\boxed{R = 14}$$

2.2.2 تقسیم کیے بغیر باقی معلوم کرنا Finding Remainder Without Dividing

درج ذیل مثالوں میں ہم بغیر تقسیم کیے باقی نکالنا سیکھتے ہیں۔ جبکہ کسی کثیر رقمی کو یک درجی کثیر رقمی سے تقسیم کیا جائے۔

مثال 1:-

مسئلہ باقی کا استعمال کرتے ہوئے باقی معلوم کریں جبکہ پہلی کثیر رقمی کو دوسری کثیر رقمی سے تقسیم کیا جائے۔

(i) $x^2+3x+7,\ x+1$ (ii) $x^3-2x^2+3x+3,\ x-3$

حل: (i) فرض کیا $P(x) = x^2+3x+7$

چونکہ تقسیم کنندہ $= x+1$

لہذا $x-a = x+1 \Rightarrow a = -1$

مسئلہ باقی کی رو سے

$$R = P(-1)$$

$$P(-1) = (-1)^2 + 3(-1) + 7$$

اب $= 1-3+7$

$$R = 5$$

(ii) فرض کیا $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 3$

$$x-a = x-3 \Rightarrow a = 3$$

$$R = P(3)$$

اب $P(3) = (3)^3 - 2(3)^2 + 3(3) + 3$

$$= 27 - 18 + 9 + 3$$

$$\boxed{R = 21}$$

مثال 2:-

جب $x^4+2x^3+kx^2+3$ کو $x-2$ سے تقسیم کیا جاتا ہے تو 1 باقی بچتا ہے 'k' کی قیمت معلوم کریں۔

حل: فرض کیا $P(x) = x^4+2x^3+kx^2+3$

چونکہ تقسیم کنندہ $= x-2$

لہذا $x-a = x-2 \Rightarrow a = 2$

اب $P(2) = (2)^4 + 2(2)^3 + k(2)^2 + 3$

$$= 16 + 16 + 4k + 3 \quad = 35 + 4k$$

لہذا $P(2) = 1$ (دیا گیا)

$$1 = 35 + 4k \quad \Rightarrow \quad 4k = -34 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{-17}{2}$$

2.2.3 کثیر رقمی کے صفر: Zeros of a Polynomial

اگر $P(x) = x - a_1$ اور $Q(x) = x - a_2$ کوئی سی یک درجی کثیر رقمیاں ہوں اس طرح کہ $P(a_1) = 0$ اور $Q(a_2) = 0$ تو a_1 ، a_2 بالترتیب $P(x)$ اور $Q(x)$ کے صفر کہلاتے ہیں۔

2.2.4 مسئلہ تجزی: The Factor Theorem

اگر کثیر رقمی $P(x)$ کے لیے $P(a) = 0$ ہو تو $x - a$ ، $P(x)$ کا جزو ضربی ہوتا ہے۔

اس کے برعکس اگر $x - a$ ، $P(x)$ کا جزو ضربی ہو تو a ، $P(x)$ کا صفر ہوگا۔

مثال 1:-

مسئلہ تجزی سے معلوم کریں کہ پہلی کثیر رقمی دوسری کثیر رقمی کا جزو ضربی ہے یا نہیں

$$x - 1, \quad x^2 + 4x - 5$$

حل: فرض کیا $P(x) = x^2 + 4x - 5$

اور $x - a = x - 1$

$$\Rightarrow \quad a = 1$$

$$P(1) = 1^2 + 4(1) - 5$$

$$= 1 + 4 - 5$$

$$= 5 - 5$$

$$= 0$$

چونکہ $P(1) = 0$

لہذا مسئلہ تجزی کی رو سے $x - 1$ ، $x^2 + 4x - 5$ کا جزو ضربی ہے۔

مثال 2:- مسئلہ تجزی کے استعمال سے ثابت کیجیے کہ $x + 1$ ، $P(x) = x^{25} + 1$ کا جزوضربی ہے۔

حل: قیمت درج کرنے سے پتا چلتا ہے۔کہ -1 ، $P(x)$ کا صفر ہے۔

$$P(x) = x^{25} + 1$$

$$P(-1) = (-1)^{25} + 1 \qquad \therefore (-1)^{\text{طاق}} = -1$$

$$= -1 + 1$$

$$= 0$$

چونکہ -1 ، $P(x) = x^{25} + 1,$ کا صفر ہے۔

لہذا ایک درجی کثیر رقمی $x - (-1) = x + 1$

مسئلہ تجزی کی رو سے کثیر رقمی $x^{25} + 1$ کا جزوضربی ہے۔

مثال 3:- مسئلہ تجزی استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں کہ $x - 1$ ، $4x^7 - 2x^6 + x^2 + 2x + 5$ کا جزوضربی نہیں ہے۔

حل: فرض کیا کہ $P(x) = 4x^7 - 2x^6 + x^2 + 2x + 5$

$$x - a = x - 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

$$P(1) = 4(1)^7 - 2(1)^6 + 1^2 + 2(1) + 5$$

$$= 4 - \not{2} + 1 + \not{2} + 5$$

$$= 10 \neq 0$$

پس $x - 1$ ، $4x^7 - 2x^6 + x^2 + 2x + 5$ کا جزوضربی نہیں ہے۔

مثال 4:- مسئلہ تجزی کے استعمال سے ثابت کریں کہ $x + 1$ ، $2x^5 - 5x^2 - x + 4$ کا جزوضربی نہیں ہے۔

حل: چونکہ $P(x) = 2x^5 - 5x^2 - x + 4$

$$x - a = x + 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

$$P(-1) = 2(-1)^5 - 5(-1)^2 - (-1) + 4$$

$$= -2 - 5 + 1 + 4$$

$$P(-1) = -2 \neq 0$$

پس $x + 1$ ، $2x^5 - 5x^2 - x + 4$ کا جزوضربی نہیں ہے۔

2.3 تین درجہ کثیر رقمی کی تجزی کرنا: FACTORIZING A CUBIC POLYNOMIAL

کسی تین درجہ کثیر رقمی کی تجزی سمجھنے کے لیے ہم درج ذیل مثالوں کا مطالعہ کرتے ہیں۔

مثال 1:- درج ذیل کی تجزی کیجیے۔ $x^3 - x^2 - 10x + 10;\ x - 1$

حل:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 10(x) + 10;\ x - 1$$
$$x - a = x - 1 \Rightarrow a = 1$$
$$P(1) = 1^3 - 1^2 - 10 + 10$$
$$= 0$$

لہٰذا $x - 1$ ، $P(x)$ کا جزوضربی ہے۔

اب

$$\begin{array}{r|l} & x^2 - 10 \\ x - 1 & x^3 - x^2 - 10x - 10 \\ & \underline{\pm x^3 \mp x^2} \\ & -10x + 10 \\ & \underline{\mp 10x \pm 10} \\ & 0 \end{array}$$

چونکہ $P(x) =$ تقسیم کنندہ × حاصل قسمت

پس $x^3 - x^2 - 10x + 10 = (x^2 - 10)(x - 1)$

مثال 2:- $x^3 - 8$ کی تجزی کیجیے جبکہ $x - 2$ جزوضربی ہو۔

حل:

$$P(x) = x^3 - 8\ ,\ x - a = x - 2 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$
$$P(2) = 2^3 - 8 = 8 - 8$$
$$= 0$$

پس $x - 2$ ، $P(x)$ کا جزوضربی ہے۔

اب

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 2x + 4 \\ x - 2 & x^3 - 8 \\ & \underline{\pm x^3 \mp 2x^2} \\ & 2x^2 - 8 \\ & \underline{\pm 2x^2 \mp 4x} \\ & 4x - 8 \\ & \underline{\pm 4x \mp 8} \\ & 0 \end{array}$$

پس $P(x) = x^3 - 8$
$= (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

مشق 2.5

I- دی گئی قیمت کے لیے کثیر رقمی کی قیمت معلوم کریں۔

1. $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 7;\ P(2)$

2. $P(x) = x^4 - 10x^2 + 25x - 2;\ P(-4)$

3. $P(x) = x^4 + 5x^3 - 13x^2 - 30;\ P(-1)$

4. $P(x) = x^5 - 10x^3 + 7x + 6;\ P(3)$

5. $P(x) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 + 19x + 6;\ P(-2)$

II- تقسیم کیے بغیر معلوم کریں کہ دوسری کثیر رقمی، پہلی کثیر رقمی کا جزو ضربی ہے یا نہیں۔

6. $x^{18} - 1;\quad x + 1$

7. $x^{18} - 1;\quad x - 1$

8. $x^9 - 2^9;\quad x + 2$

9. $x^9 + 2^9;\quad x - 2$

10. $3x^4 - 2x^3 + 5x - 6;\quad x - 1$

11. $5x^6 - 7x^3 - 6x + x;\quad x - 1$

12. $3x^3 - 7x^2 - 8x + 2;\quad x + 1$

13. $5x^8 - 2x^5 + 3x^3 + 6x + 2;\quad x + 1$

14. $6x^3 + 2x^2 - x + 9;\quad x - 1$

15. $4x^3 - 3x^2 - 8x + 4;\quad x - 2$

16. $5x^3 + 3x^2 - x + 1;\quad x + 1$

17. $2y^3 - 8y^2 + y - 4;\quad y - 4$

18. $z^3 - 5z^2 - 4z - 4;\quad z + 2$

III- حل کریں۔

19. اگر $P(x) = x^3 - kx^2 + 3x + 5$ کو $x - 1$ پر تقسیم کرنے سے 8 باقی بچتا ہو تو 'k' کی قیمت معلوم کریں۔

20. اگر $P(x) = 3x^3 + kx - 26$ کو $x - 2$ پر تقسیم کرنے سے 0 باقی بچتا ہو تو 'k' کی قیمت معلوم کریں۔

جائزہ مشق-2

I- درست جوابات پر دائرہ لگایئے۔

1. یک درجی کثیر رقمی کا درجہ ہوتا ہے۔

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d)

2. دو درجی کثیر رقمی کا درجہ ہوتا ہے۔

(a) 0 (b) 1

(c) 2 (d) 3

3. سہ درجی کثیر رقمی کا درجہ ہوتا ہے۔

(a) 0 (b)

(c) 2 (d) 3

4. $(x+3)^2-4$ کی تجزی ہے۔

(a) $(x+1)(x+5)$ (b) $(x-1)(x+5)$

(c) $(x+1)(x-5)$ (d) $(x-1)(x-5)$

5. x^4-16 کی تجزی ہے۔

(a) $(x+2)(x+2)$ (b) $(x-4)(x+4)$

(c) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ (d) $(x-2)(x+4)$

6. x^3-y^3 کی تجزی ہے۔

(a) $(x-y)(x^2+y^2)$ (b) $(x-y)(x^2+xy+y^2)$

(c) $(x-y)(x^2-xy+y^2)$ (d) $(x+y)(x^2+xy+y^2)$

7. a^4-1 کی تجزی ہے۔

(a) $(a-1)(a+1)(a^2+1)$ (b) $(a-1)(a^2+1)$

(c) $(a+1)(a^2-1)$ (d) $(a^2+1)(a+1)$

8. اگر کثیر رقمی $P(x)$ جس کا درجہ $n \geq 1$ ہے کو کثیر رقمی '$x-a$' سے تقسیم کیا جائے جبکہ a ایک مستقل مقدار ہے تو $P(a)$ کی قیمت ہوگی۔

(a) باقی (b)

(c) 1 (d) a

9. اگر $x - a$، $P(x)$ کا جزوضربی ہو تو $P(a)$ برابر ہوگا

(a) 0 (b) 1

(c) a (d)

10. اگر $P(x) = x^3 - 2x^2 + 5x + 1$ ہو تو $P(1)$ ہوگا۔

(a) 5 (b) -5

(c) 7 (d) 0

II- خالی جگہوں کو پُر کیجیے

1. یک درجی کثیر رقمی کا درجہ ہوتا ہے ________

2. دو درجی کثیر رقمی کا درجہ ہوتا ہے ________

3. سہ درجی کثیر رقمی کا درجہ ہوتا ہے ________

4. $x^2 - 9$ کی تجزی ________

5. $(x+2)^2 - 1$ کی تجزی ________

6. $x^3 + 8$ کی تجزی ________

7. $x^3 - 8$ کی تجزی ________

8. اگر $P(x) = x^4 + 3x^2 - 2x + 1$ ہو تو $P(1) =$ ________

9. اگر $P(x) = x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ ہو تو $P(-2) =$ ________

10. اگر $P(x) = x^3 - a^3$ ہو تو $P(a) =$ ________

خلاصہ SUMMARY

یک درجی کثیر رقمی: ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ "1" ہو یک درجی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔

دو درجی کثیر رقمی: ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ "2" ہو دو درجی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔

سہ درجی کثیر رقمی: ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ "3" ہو سہ درجی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔

درج ذیل قسم کی کثیر رقمیوں کی تجزی کرنا۔

$kx+ky+kz,\ ax+ay+bx+by,\ \ a^2 \pm 2ab+b^2$

$a^2-b^2,\ (a^2 \pm 2ab+b^2)-c^2,\ a^4+a^2b^2+b^4$ یا $a^4+4b^4,$

$x^2+px+q,\ ax^2+bx+c,$

$a^3+3a^2bx+3ab^2+b^3,\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$

$a^3 \pm b^3.$

مسئلہ باقی: اگر $P(x)$ کثیر رقمی جس کا درجہ $n \geq 1$ ہو تو کثیر رقمی '$x-a$' سے تقسیم کیا جائے جبکہ 'a' کوئی مستقل ہے، تو باقی $P(a)$ ہوگا۔

مسئلہ تجزی: اگر کثیر رقمی $P(x)$ کو '$x-a$' سے تقسیم کیا جائے کہ $P(a) = 0$ تو '$x-a$'، $P(x)$ کا جزو ضربی ہوتا ہے۔

یونٹ

3

ALGEBRAIC MANIPULATION الجبری مہارت

- H.C.F اور L.C.M
- الجبری کسور پر بنیادی عوامل
- الجبری کسور کا جذر

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- الجبری جملوں کا عاد اعظم HCF اور ذو اضعاف اقل (LCM) معلوم کر سکیں۔
- تجزی یا تقسیم کے طریقہ سے عاد اعظم اور ذو اضعاف اقل معلوم کر سکیں۔
- عاد اعظم اور ذو اضعاف اقل میں تعلق جان سکیں۔
- کسری جملوں جن میں + ، − ، × ، ÷ کو استعمال کیا گیا کو HCF اور LCM کی مدد سے مختصر کر سکیں۔
- الجبری جملوں کا جذر بذریعہ تجزی اور تقسیم معلوم کر سکیں۔

3.1 عاداعظم (HCF) اور ذو اضعاف اقل (LCM)

HIGHEST COMMON FACTOR (HCF) AND LEAST COMMON MULTIPLE (LCM)

3.1.1 عاداعظم (HCF) Highest Common Factor (HCF)

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عاداعظم ایک بڑے سے بڑے درجے کا ایسا مشترک جملہ ہوتا ہے جو کہ ان میں سے ہر ایک جملے کو بغیر "باقی" کے پورا پورا تقسیم کرتا ہے۔

عاداعظم کا اختصار HCF ہے۔

ہم دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عاداعظم (HCF) درج ذیل طریقوں سے معلوم کر سکتے ہیں:

(i) بذریعہ تجزی (ii) تقسیم کے عمل سے

بذریعہ تجزی عاداعظم HCF معلوم کرنا: HCF BY FACTORIZATION

بذریعہ تجزی عاداعظم معلوم کرنے کا طریقہ درج ذیل مثالوں سے واضح کیا جاتا ہے۔

مثال 1:-

$4p^2q^3r$ ، $8p^2qr^3$ اور $12p^3q^2$ کا عاداعظم HCF معلوم کریں۔

حل:

$12p^3q^2 = 2 \times 2 \times 3 \times p \times p \times p \times q \times q$ کی تجزی

$8p^2qr^3 = 2 \times 2 \times 2 \times p \times p \times q \times r \times r \times r$ کی تجزی

$4p^2q^3r = 2 \times 2 \times p \times p \times q \times q \times q \times r$ کی تجزی

مشترک اجزائے ضربی : $2 \times 2 \times p \times p \times q$

پس عاداعظم $HCF = 4p^2q$

مثال 2:-

$2x^2 - x - 1$ ، $2x^2 + 5x + 2$ اور $2x^2 + 3x + 1$ کا عاداعظم معلوم کریں

حل:

$$2x^2 + 3x + 1 = 2x^2 + 2x + x + 1$$ کی تجزی
$$= 2x(x+1) + 1(x+1)$$
$$= (2x+1)(x+1)$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 2x^2 + 4x + x + 2$$ کی تجزی
$$= 2x(x+2) + 1(x+2)$$
$$= (2x+1)(x+2)$$

$$2x^2 - x - 1 = 2x^2 - 2x + x - 1$$ کی تجزی
$$= 2x(x-1) + 1(x-1)$$
$$= (2x+1)(x-1)$$

مشترک جزوضربی $= 2x + 1$

پس عاداعظم $= 2x + 1$

مثال 3:-

$20(2x^6 + 3x^5 + x^4)$ اور $24(6x^4 - x^3 - 2x^2)$ کا عاداعظم معلوم کریں

حل: فرض کیا

$$P(x) = 24(6x^4 - x^3 - 2x^2)$$ کی تجزی
$$= 24x^2(6x^2 - x - 2)$$
$$= 24x^2\left[6x^2 - 4x + 3x - 2\right]$$
$$= 24x^2\left[2x(3x-2) + 1(3x-2)\right]$$
$$P(x) = 24x^2(2x+1)(3x-2) = 2^2 \times 2 \times 3 \times x^2(2x+1)(3x-2)$$

اور فرض کیا

$$Q(x) = 20(2x^6 + 3x^5 + x^4)$$ کی تجزی
$$= 20x^4\left[2x^2 + 3x + 1\right]$$
$$= 20x^4(2x^2 + 2x + x + 1)$$
$$= 20x^4\left[2x(x+1) + 1(x+1)\right]$$
$$= 20x^4(x+1)(2x+1)$$
$$= 2^2 \times 5 \times x^2 \times x^2(x+1)(2x+1)$$

مشترک جزوضربی $= 2^2 \times x^2 \times (2x+1)$

پس عاداعظم $= 4x^2(2x+1)$

مثال 4:-

x^2+x-6 ، $x^2-7x+10$ اور x^2-4 کا عاد اعظم معلوم کریں

حل:

x^2-4 کے اجزائے ضربی $= (x-2)\ (x+2)$

$x^2-7x+10$ کے اجزائے ضربی $= x^2-5x-2x+10$
$= x(x-5)-2(x-5)$
$= (x-5)\ (x-2)$

x^2+x-6 کے اجزائے ضربی $= x^2+3x-2x-6$
$= x(x+3)-2(x+3)$
$= (x+3)\ (x-2)$

مشترک جزو ضربی $= x-2$
پس عاد اعظم $= x-2$

مشق 3.1

تجزی کے ذریعے عاد اعظم معلوم کریں۔

1. $abxy,\ a^2bc$
2. $6pqr,\ 15qrs$
3. $8xy^2z^3,\ 12x^2y^2z^2$
4. $14a^2bc,\ 21ab^2$
5. $3x^5y^2,\ 12x^2y^4,\ 15x^3y^2$
6. $4abc^3,\ 8a^3bc,\ 6ab^3c$
7. $x^3+64,\ x^2-16$
8. $x^2-y^2,\ x^4-y^4,\ x^6-y^6$
9. $t^2-9,\ (t+3)^2,\ t^2+t-6$
10. $x^2-x-2,\ x^2+x-6,\ x^2-3x+2$
11. $1-x^2,\ x^3+1,\ 1-x-2x^2$
12. $x^3-8,\ x^2-7x+10$
13. $x^2+3x+2,\ x^2+4x+3,\ x^2+5x+4$
14. $x^4+x^3-6x^2,\ x^4-9x^2,\ x^3+x^2-6x$
15. $35a^2c^3b,\ 45a^3cb^2,\ 30ac^2b^3$

بذریعہ تقسیم عاداعظم HCF معلوم کرنا HCF BY DIVISION METHOD

تقسیم کے قاعدے سے عاداعظم معلوم کرنے کے لیے دیے گئے جملوں کو ان کے مشترک متغیر کی قوت نماؤں کے لحاظ سے ترتیب نزولی میں لکھیے۔
بڑے درجے کی کثیر رقتی کو چھوٹے درجے کی کثیر رقتی سے تقسیم کیجیے اور باقی معلوم کیجیے۔ پہلے والے تقسیم کنندہ کو مقسوم علیہ بنا کر باقی کو تقسیم کنندہ بنا لیجیے اور تقسیم کر کے باقی معلوم کریں۔ اس عمل کو جاری رکھیں یہاں تک کہ صفر باقی بچے۔ آخری تقسیم کنندہ مطلوبہ عاداعظم ہے۔

مثال 1:-

$(x^3 - x^2 + x - 1)$ ، $(x^3 - x^2 - 3x + 3)$ کا عاداعظم تقسیم کے قاعدہ سے معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ x^3 - x^2 + x - 1 & x^3 - x^2 - 3x + 3 \\ & \pm x^3 \mp x^2 \pm x \mp 1 \\ \hline & -4x + 4 = -4(x-1) \end{array}$$

$-4(x-1)$ کو -4 سے تقسیم کرنے سے ہمیں $(x-1)$ حاصل ہوا

$$\begin{array}{r|l} & x^2 + 1 \\ x - 1 & x^3 - x^2 + x - 1 \\ & \pm x^3 \mp x^2 \\ \hline & x - 1 \\ & \pm x \mp 1 \\ \hline & 0 \end{array}$$

پس $x - 1$ = عاداعظم

یاد رکھیے:
عاداعظم معلوم کرتے وقت کسی بھی کثیر رقتی کو کسی ہندسے سے ضرب دینے یا تقسیم کرنے سے عاداعظم متاثر نہیں ہوتا۔

مثال 2:-

بذریعہ تقسیم $5x^3 + 10x^2 - 3x - 6$ ، $2x^3 + 6x^2 + 5x + 2$ اور $3x^3 + 6x^2 + 2x + 4$ کا عاد اعظم معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{array}{r} 5 \\ 2x^3 + 6x^2 + 5x + 2 \overline{) 5x^3 + 10x^2 - 3x - 6} \\ \times 2 \\ \hline 10x^3 + 20x^2 - 6x - 12 \\ \pm 10x^3 \pm 30x^2 \pm 25x \pm 10 \\ \hline -10x^2 - 31x - 22 \end{array}$$

اب $-10x^2 - 31x - 22$ کو '-1' سے تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوا $(10x^2 + 31x + 22)$

$$\begin{array}{r} x - 1 \\ 10x^2 + 31x + 22 \overline{) 2x^3 + 6x^2 + 5x + 2} \\ \times 5 \\ \hline 10x^3 + 30x^2 + 25x + 10 \\ \pm 10x^3 \pm 31x^2 \pm 22x \\ \hline -x^2 + 3x + 10 \\ \times 10 \\ \hline -10x^2 + 30x + 100 \\ \mp 10x^2 \mp 31x \mp 22 \\ \hline 61x + 122 \end{array}$$

اب $61x + 122$ کو 61 سے تقسیم کرنے سے ہمیں حاصل ہوا $(x + 2)$

$$\begin{array}{r} 10x + 11 \\ x + 2 \overline{) 10x^2 + 31x + 22} \\ \pm 10x^2 \pm 20x \\ \hline 11x + 22 \\ \pm 11x \pm 22 \\ \hline 0 \end{array}$$

اب

$$\begin{array}{r|l} & 3x^2 + 2 \\ x+2 & 3x^3 + 6x^2 + 2x + 4 \\ & \pm 3x^3 \pm 6x^2 \\ \hline & 2x + 4 \\ & \pm 2x \pm 4 \\ \hline & 0 \end{array}$$

پس $x + 2$ = عاداعظم

مثال 3:-

اگر $x^2 - x - 6$ اور $x^2 + 3x - 18$ کا عاداعظم $x - a$ ہو تو $'a'$ کی قیمت معلوم کریں۔

حل:- صاف ظاہر ہے کہ $x - a$ ، عاداعظم ہو تو دونوں کثیر رقمیوں کو پورا پورا تقسیم کرے گا اور $x = a$ دونوں کثیر رقمیوں کو صفر بنائے گا۔

یعنی کہ $a^2 + 3a - 18 = 0$ اور $a^2 - a - 6 = 0$

$$a^2 - a - 6 = a^2 + 3a - 18$$

$$4a = 12$$

$$a = 3$$

تقسیم کنندہ

کوئی کثیر رقمی $D(x)$ کسی کثیر رقمی $P(x)$ کا تقسیم کنندہ کہلاتی ہے اگر $P(x) = D(x) \, . \, Q(x)$
جبکہ $Q(x)$ کوئی اور کثیر رقمی ہے

مثلاً $D(x) = x - 2$ اور $P(x) = (x - 2)\,(x + 3)$

تو پھر واضح ہے کہ $D(x)$ ، $P(x)$ کا تقسیم کنندہ ہے

کیونکہ $P(x) = (x - 2)\,(x + 3)$

$$= D(x) \, . \, Q(x)$$

جبکہ $Q(x) = x + 3$

مشق 3.2

تقسیم کے طریقہ سے عاداعظم **HCF** معلوم کریں۔

1. $x^4+x^2+1\ ,\ x^4+x^3+x+1$
2. $6x^3+7x^2-9x+2\ ,\ 8x^4+6x^3-15x^2+9x-2$
3. $4x^3+2x^2-6x\ ,\ 4x^3-8x+4$
4. $x^3+7x^2+12x\ ,\ x^3-2x^2-15x$
5. $x^3-x^2-x+1\ ,\ x^4-2x^3+2x-1$
6. $x^3-x^2-x-2\ ,\ x^3+3x^2-6x-8$
7. $x^2+3x-4\ ,\ x^3-2x^2-2x+3$
8. $3x^3-14x^2+9x+10\ ,\ 15x^3-34x^2+21x-10$
9. $2x^4+x^3+4x+2\ ,\ 6x^3+5x^2+x\ ,\ 2x^4+3x^3+x^2+2x+1$
10. $x^3+x^2-5x+3\ ,\ x^3-7x+6\ ,\ x^3+2x^2-2x+3$

3.1.2 ذواضعاف اقل (LCM) Least Common Multiple (LCM)

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا ذواضعاف اقل ایک کم ترین درجہ کا ایسا جملہ ہوتا ہے جو ان سب جملوں سے بغیر ''باقی'' کے پورا پورا تقسیم ہو سکے۔

ذواضعاف اقل کا مخفف LCM ہے۔

ہم ذواضعاف اقل بذریعہ تجزی معلوم کر سکتے ہیں

بذریعہ تجزی LCM معلوم کرنا LCM BY FACTORIZATION

بذریعہ تجزی LCM معلوم کرنے کے لیے درج ذیل مثالوں پر غور کیجیے۔

مثال 1:- $4p^2q^3r$ ، $8p^2qr^3$ اور $12p^3q^2$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں

حل:

$$12p^3q^2 = 2 \times 2 \times 3 \times p \times p \times p \times q \times q$$ کی تجزی

$$8p^2qr^3 = 2 \times 2 \times 2 \times p \times p \times q \times r \times r \times r$$ کی تجزی

$$4p^2q^3r = 2 \times 2 \times p \times p \times q \times q \times q \times r$$ کی تجزی

غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب × مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب = ذواضعاف اقل

$$= (2^2 \times p^2 \times q^2 \times r) \times (2 \times 3 \times p \times q \times r^2)$$

$$= 4p^2q^2r \times 6pqr^2$$

$$= 4 \times 6 \times p^2 \times p \times q^2 \times q \times r \times r^2$$

ذواضعاف اقل $= 24p^3q^3r^3$

> **یاد رکھیے:**
>
> مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لیتے وقت مشترکہ اجزائے ضربی کو بار بار شمار نہیں کرتے۔

مثال 2:- $24ab^2c^2$ ، $6ab^2c^3$ اور $18ab^2c^3$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل:

$$18ab^2c^3 = 2 \times 3 \times 3 \times a \times b \times b \times c \times c \times c$$ کی تجزی

$$6a^2bc^3 = 2 \times 3 \times a \times a \times b \times c \times c \times c$$ کی تجزی

$$24ab^2c^2 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times a \times b \times b \times c \times c$$ کی تجزی

غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب × مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب = ذواضعاف اقل

$$= (2 \times 3 \times a \times b^2 \times c^3) \times (2 \times 2 \times 3 \times a)$$

$$= (6ab^2c^3) \times (12a)$$

ذواضعاف اقل $= 72a^2b^2c^3$

مثال 3:- x^2-49 اور $x^2-4x-21$ کا ذواضعاف اقل معلوم کریں۔

حل:

$$x^2-49 = x^2-7^2$$
$$= (x-7)(x+7)$$

اور $x^2-4x-21 = x^2-7x+3x-21$
$$= x(x-7)+3(x-7)$$
$$= (x-7)(x+3)$$

مشترک جزوضربی $= x-7$

غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب $= (x+7)(x+3)$

غیر مشترک اجزائے ضربی کا حاصل ضرب × مشترک جزوضربی = ذواضعاف اقل

ذواضعاف اقل $= (x-7)\times(x+7)(x+3)$
$$= (x^2-7^2)(x+3)$$
$$= (x^2-49)(x+3)$$

ذواضعاف اقل $= x^3+3x^2-49x-147$

مشق 3.3

بذریعہ تجزی ذواضعاف اقل **LCM** معلوم کیجیے۔

1. $21a^4x^3y\ ,\ 35a^2x^4y\ ,\ 28a^3xy^4$

2. $3a^4b^2c^3\ ,\ 5a^2b^3c^5$

3. $2ab\ ,\ 3ab\ ,\ 4ca$

4. $x^2yz\ ,\ xy^2z\ ,\ xyz^2$

5. $p^3q-pq^3\ ,\ p^5q^2-p^2q^5$

6. $x^3+64\ ,\ x^2-16$

7. $x^2-x-2\ ,\ x^2+x-6\ ,\ x^2-3x+2$

8. $y^2-9\ ,\ (y+3)^2\ ,\ y^2+y-6$

9. $1-y^2\ ,\ y^3+1\ ,\ 1-y-2y^2$

10. $x^2-y^2\ ,\ x^4-y^4\ ,\ x^6-y^6$

11. $x^3+1\ ,\ x^4+x^2+1\ ,\ (x^2+x+1)^2$

12. $x^3+y^3\ ,\ x^4-y^4\ ,\ x^6+y^6$

13. $2x^2+5x+3\ ,\ x^2+2x+1\ ,\ 2x^2+9x+9$

14. $x^4+x^3-6x^2\ ,\ x^4-9x^2\ ,\ x^3+x^2-6x$

15. $x^2+4xy+4y^2\ ,\ x^2+3xy+2y^2\ ,\ x^2+2xy+y^2$

3.1.3 عاداعظم اور ذواضعاف اقل کا باہمی تعلق
Relationship Between HCF and LCM

A اور B کوئی سے دو الجبری جملے ہوں اور **HCF** اور **LCM** کو بالترتیب H اور L سے ظاہر کیا جائے تو ان کے درمیان تعلق کو یوں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\boxed{A \times B = H \times L}$$

یہ عاداعظم اور ذواضعاف اقل کے درمیان کلیہ کہلاتا ہے۔

ثبوت: فرض کیا

$$\frac{A}{H} = x \quad \text{اور} \quad \frac{B}{H} = y$$

$$A = Hx \quad .... \quad (i)$$

$$B = Hy \quad .... \quad (ii)$$

چونکہ x اور y میں کوئی جزو ضربی مشترک نہیں

لہٰذا
$$L = H.x.y$$

$$HL = H(H.x.y) \quad \text{(دونوں اطراف } H \text{ سے ضرب دینے سے)}$$

$$= (Hx).(Hy)$$

$$HL = A.B.$$

اہم نتائج:

$$(i) \quad L = \frac{A \times B}{H}$$

$$(ii) \quad H = \frac{A \times B}{L}$$

$$(iii) \quad A = \frac{H \times L}{B}$$

نوٹ:
اگر A اور B دو الجبری جملے ہوں تو ہم ذواضعاف اقل معلوم کرنے سے پہلے عاداعظم معلوم کرتے ہیں۔
اگر دو الجبری جملوں کا عاداعظم معلوم ہو تو ہم ان کا ذواضعاف اقل معلوم کر سکتے ہیں۔

مثال 1:-

دو الجبری جملوں کے ذواضعاف اقل اور عاداعظم بالترتیب $(2x+1)\ (x^2-1)$ اور $(2x+1)$ ہیں۔ اگر ایک جملہ $(2x+1)\ (x-1)$ ہو تو دوسرا جملہ معلوم کریں۔

حل:

$$L = (2x+1)\ (x^2-1)$$
$$H = 2x+1$$
$$A = (x-1)\ (2x+1)$$
$$B = ?$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$A \times B = H \times L$$

$$B = \frac{H \times L}{A}$$

$$= \frac{(2x+1)\ (x^2-1)\ (2x+1)}{(x-1)\ (2x+1)}$$

$$= \frac{(2x+1)(x+1)\ (x-1)(2x+1)}{(x-1)\ (2x+1)}$$

$$B = (2x+1)(x+1)$$

مثال 2:-

اگر دو جملوں کا عاداعظم، $(x+3)$ اور ان کا ذواضعاف اقل، x^3-7x+6 ہو تو دوسرا جملہ معلوم کریں جبکہ پہلا جملہ (x^2+2x-3) ہے۔

حل: فرض کیا مطلوبہ جملہ B ہے۔ تو

$$A \times B = H \times L$$

$$B = \frac{H \times L}{A}$$

$$= \frac{(x+3)\ (x^3-7x+6)}{x^2+2x-3}$$

$$= (x+3)(x-2)$$

$$B = x^2+x-6$$

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ x^2+2x-3 & x^3-7x+6 \\ & -x^3 \mp 3x \quad \pm 2x^2 \\ \hline & -2x^2-4x+6 \\ & \mp 2x^2 \mp 4x \pm 6 \\ \hline & 0 \end{array}$$

مثال 3:-

دو جملوں کا حاصل ضرب $x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48$ ہے۔ اور ان کا ذواضعاف اقل $x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ ہے۔ ان کا عاداعظم معلوم کیجیے۔

حل: دیا گیا ہے کہ $A \times B = x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48$

$$L = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$$

$$H = ?$$

$$L \times H = A \times B$$

$$H = \frac{A \times B}{L}$$

$$H = \frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48}{x^3 + 5x^2 - 2x - 24}$$

$$\begin{array}{r|l} & x-2 \\ \hline x^3 + 5x^2 - 2x - 24 & x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 20x + 48 \\ & \pm x^4 \pm 5x^3 \mp 2x^2 \mp 24x \\ \hline & -2x^3 - 10x^2 + 4x + 48 \\ & \mp 2x^3 \mp 10x^2 \pm 4x \pm 48 \\ \hline & 0 \end{array}$$

$\therefore$ عاداعظم $= x - 2$

> **یاد رکھیے کہ:** عاداعظم × ذواضعاف اقل = دو الجبری جملوں کا حاصل ضرب
>
> ذواضعاف اقل = (دونوں الجبری جملوں کا حاصل ضرب) ÷ (عاداعظم)
>
> عاداعظم = (دونوں الجبری جملوں کا حاصل ضرب) ÷ (ذواضعاف اقل)

مشق 3.4

درج ذیل کا عاداعظم اور ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

1. $x^3+x^2+x+1\ ,\ \ x^3-x^2+x-1$
2. $x^3-3x^2-4x+12\ \ ,\ \ x^3-x^2-4x+4$
3. $2x^3+2x^2+x+1\ ,\ \ 2x^3-2x^2+x-1$
4. $6x^3+7x^2-9x+2\ ,\ \ 8x^4+6x^3-15x^2+9x-2$
5. $3x^4+17x^3+27x^2+7x-6\ \ ,\ 6x^4+7x^3-27x^2+17x-3$
6. $2x^4+3x^3-13x^2-7x+15\ \ ,\ 2x^4+x^3-20x^2-7x+24$
7. $x^4-x^3-x+1\ ,\ x^4+x^3-x-1$
8. $x^4+x^3+x+1\ ,\ x^4+x^3-x-1$

مطلوبہ کثیر رقمی معلوم کیجیے۔

9. $A = x^2-5x-14\ ,\ H = x-7\ ,\ L = x^3-10x^2+11x+70\ ,\ B = ?$
10. $B = 3x^2+14x+8\ ,\ H = 3x+2\ ,\ L = 6x^3+25x^2+2x-8\ ,\ A = ?$

11. دو کثیر رقمیوں کا حاصل ضرب $x^4+6x^3-3x^2-56x-48$ ہے اور ان کا عاداعظم $x^3+2x^2-11x-12$ ہے۔ ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

12. دو کثیر رقمیوں کے حاصل ضرب اور L.C.M بالترتیب $x^4+5x^3-x^2-17x+12$ اور $x^3+6x^2+5x-12$ ہیں۔ ان کا H.C.F معلوم کیجیے۔

13. دو کثیر رقمیوں کے حاصل ضرب اور ذواضعاف اقل بالترتیب $x^4-12x^3+53x^2-102x+72$ اور $x-3$ ہیں۔ ان کا عاداعظم معلوم کیجیے۔

14. دو کثیر رقمیوں کے حاصل ضرب اور عاداعظم بالترتیب $x^4-5x^3+2x^2+20x-24$ اور $x+2$ ہیں۔ ان کا ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

15. ایک جملہ $x^3+3x^2-4x-12$ ہے۔ جبکہ دوسرا جملہ $x^3+5x^2-4x-20$ ہے۔ ان کا عاداعظم x^2-4 ہے۔ ان کا ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

16. ایک الجبری جملہ x^3-x^2+2x-2 اور دوسرا جملہ x^3-x^2-2x+2 ہے۔ ان کا عاداعظم، $x-1$ ہے۔ ان کا ذواضعاف اقل معلوم کیجیے۔

17. ثابت کیجیے کہ $H^3+L^3 = A^3+B^3$ جبکہ $H+L = A+B$، H اور L بالترتیب عاداعظم اور ذواضعاف اقل کو ظاہر کرتے ہیں اور A اور B بالترتیب کثیر رقمیاں ہیں۔

3.2 الجبری کسور پر بنیادی عوامل
BASIC OPERATIONS ON THE ALGEBRAIC FRACTIONS

3.2.1 الجبری جملوں کی جمع اور تفریق
Addition and Subtraction of the Algebraic Fractions

الجبری جملوں کی جمع اور تفریق کی وضاحت درج ذیل مثالوں سے کی جاتی ہے۔

مثال 1:- مختصر کیجیے۔

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-8}+\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}-\frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$$

حل:

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-8}+\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12}-\frac{x^2+x-6}{x^2-6x+8}$$

$$=\frac{x^2+2x+x+2}{x^2-4x+2x-8}+\frac{x^2-3x-2x+6}{x^2-4x-3x+12}-\frac{x^2+3x-2x-6}{x^2-4x-2x+8}$$

$$=\frac{(x+2)(x+1)}{(x-4)(x+2)}+\frac{(x-3)(x-2)}{(x-4)(x-3)}-\frac{(x+3)(x-2)}{(x-4)(x-2)}$$

$$=\frac{x+1}{x-4}+\frac{x-2}{x-4}-\frac{x+3}{x-4}$$

$$=\frac{x+1+x-2-x-3}{x-4}$$

$$=\frac{x-4}{x-4}\quad=1$$

یاد رکھیے:

(i) الجبری کسور میں نسب نما اور مخرج، کثیر رقمیاں ہوتی ہیں۔

(ii) جب ہم ان کسور کو جمع یا تفریق کرتے ہیں تو پہلے ہم انہیں مختصر ترین شکل میں تبدیل کر لیتے ہیں

مثال 2:- مختصر کریں

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{a-b}-\frac{ab}{a^3-b^3}$$

حل:-

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{1}{a-b}-\frac{ab}{a^3-b^3}$$

$$=\frac{(a-b)(a+b)+1(a^2+ab+b^2)-ab}{a^3-b^3}$$

$$=\frac{a^2-b^2+a^2+ab+b^2-ab}{a^3-b^3}$$

$$=\frac{2a^2}{a^3-b^3}$$

3.2.2 الجبری کسور کی ضرب اور تقسیم

Multiplication and Division of the Algebraic Fractions

اگر P,Q,R,S الجبری جملے ہوں تو $\frac{P}{Q}$ اور $\frac{R}{S}$ الجبری کسور کہلاتی ہیں جبکہ $S \neq 0$, $Q \neq 0$ ۔

الجبری کسور کی ضرب

$$\frac{P}{Q}\times\frac{R}{S}=\frac{PR}{QS} \qquad \text{جبکہ} \quad Q\neq 0\ ,\ S\neq 0.$$

الجبری کسور کی تقسیم

$$\frac{P}{Q}\div\frac{R}{S}=\frac{P}{Q}\times\frac{S}{R}$$

$$=\frac{PS}{QR} \qquad \text{جبکہ} \quad Q\neq 0\ ,\ S\neq 0.$$

مثال 1:- مختصر کیجیے۔

$$\frac{b^2-c^2-a^2+2ac}{c^2+a^2-b^2+2ac}\times\frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{a^2-b^2+c^2-2ac}$$

حل:

$$\frac{b^2-c^2-a^2+2ac}{c^2+a^2-b^2+2ac}\times\frac{b^2+c^2-a^2-2bc}{a^2-b^2+c^2-2ac}$$

$$=\frac{b^2-(c^2+a^2-2ac)}{(c^2+a^2+2ac)-b^2}\times\frac{(b^2+c^2-2bc)-a^2}{(a^2+c^2-2ac)-b^2}$$

$$=\frac{b^2-(a-c)^2}{(a+c)^2-b^2}\times\frac{(b-c)^2-a^2}{(a-c)^2-b^2}$$

$$=\frac{\left[b^2-(a-c)^2\right]}{(a+c-b)(a+c+b)}\times\frac{(b-c-a)(b-c+a)}{(-1)\left[b^2-(a-c)^2\right]}$$

$$=\frac{-(b-c-a)(b-c+a)}{(a+c-b)(a+b+c)}$$

$$=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+c-b)(a+b+c)}=\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

مثال 2:- مختصر کیجیے۔

$$\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4}\div\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+b^2}$$

حل:

$$\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4}\div\frac{a^2+ab+b^2}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a^3-b^3}{a^4-b^4}\times\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(a^2+b^2)(a+b)(a-b)}\times\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}$$

$$=\frac{1}{a+b}$$

مشق 3.5

مختصر کیجیے۔

1. $\frac{1}{a}+\frac{2}{a+1}-\frac{3}{a+2}$

2. $\frac{2a}{(x-2a)}-\frac{x-a}{x^2-5ax+6a^2}+\frac{2}{x-3a}$

3. $\frac{1}{a^2+1}-\frac{a^4}{a^2+1}+\frac{a^6}{a^2-1}-\frac{1}{a^2-1}$

4. $\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{x^2-x+1}+\frac{2x+1}{x^4+x^2+1}$

5. $\frac{a^2(b-c)}{(a+b)(a+c)}-\frac{b^2(c-a)}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2(a-b)}{(c+a)(c+b)}$

6. $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{x+2}{x^2+x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}$

7. $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\frac{a^2-ab+b^2}{a-b}$

8. $\frac{x^4-y^4}{x^2-2xy+y^2}\times\frac{x-y}{x(x+y)}\div\frac{x^2+y^2}{x}$

9. $\frac{x^2-1}{x^2+x-2}\times\frac{x^3+8}{x^4+4x^2+16}\div\frac{x^2+x}{x^3+2x^2+4x}$

10. $\frac{a^3+64b^3}{a^2+20ab+64b^2}\div\frac{a^2-4ab+16b^2}{a^2+4ab+16b^2}\times\frac{a^2+12ab-64b^2}{a^3-64b^3}$

11. $\frac{a}{(a+b)^2-2ab}\times\frac{a^4-b^4}{(a+b)^3-3ab(a+b)}\div\frac{(a+b)^2-4ab}{(a+b)^2-3ab}$

12. $\frac{a^2-1}{a^2-a-2}\div\frac{a^2+5a+6}{a^2-5a+6}\div\frac{a^2-4a+3}{a^2+4a+3}$

3.3 الجبری جملوں کا جذر SQUARE ROOT OF ALGEBRAIC EXPRESSION

ہم الجبری جملوں کا جذر معلوم کر سکتے ہیں۔

(i) تجزی کے طریقہ سے

(ii) تقسیم کے طریقہ سے

3.3.1 تجزی کے طریقہ سے جذر معلوم کرنا Square Root By Factorization Method

ہم اس طریقہ میں جملے کو مکمل مربع کی صورت میں ظاہر کر کے جذر معلوم کرتے ہیں۔

مثلاً

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$$

یا $$x^2 \pm 2xy + y^2 = \left[\pm(x \pm y)\right]^2$$

یا $$\sqrt{x^2 \pm 2xy + y^2} = \pm(x \pm y)$$

پس الجبری جملے کا جذر دو ایسے جملوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ جو ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہوتے ہیں۔

مثال 1:-

$49x^2 + 112xy + 64y^2$ کا تجزی کے طریقہ سے جذر معلوم کیجیے۔

حل: $49x^2 + 112xy + 64y^2$

$$= (7x)^2 + 2(7x)(8y) + (8y)^2$$

$$= (7x + 8y)^2$$

$$49x^2 + 112xy + 64y^2 = \left[\pm(7x + 8y)\right]^2$$

دونوں طرف جذر المربع سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\sqrt{49x^2 + 112xy + 64y^2} = \pm(7x + 8y)$$

مثال 2:-

$(x^2+\frac{1}{x^2})+10(x+\frac{1}{x})+27$ کا جذر معلوم کریں۔

حل: فرض کیا کہ

$$x+\frac{1}{x} = z,$$

دونوں طرف مربع لینے سے

$$(x+\frac{1}{x})^2 = z^2$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2 = z^2$$

$$x^2+\frac{1}{x^2} = z^2-2$$

$$\therefore (x^2+\frac{1}{x^2})+10(x+\frac{1}{x})+27 = z^2-2+10z+27$$

$$= z^2+10z+25$$

$$= (z)^2+2(z)5+(5)^2$$

$$= (z+5)^2 \qquad \left[z = x+\frac{1}{x} \text{ رکھنے سے}\right]$$

$$= (x+\frac{1}{x}+5)^2$$

$$(x^2+\frac{1}{x^2})+10(x+\frac{1}{x})+27 = \left[\pm(x+\frac{1}{x}+5)\right]^2$$

دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{(x^2+\frac{1}{x^2})+10(x+\frac{1}{x})+27} = \pm(x+\frac{1}{x}+5)$$

مثال 3:-

$x(x-1)(x-2)(x-3)+1$ کا جذر معلوم کریں۔

حل:

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1$$

$$= [x(x-3)]\,[(x-1)(x-2)]+1$$

$$= \left[x^2-3x\right]\left[x^2-3x+2\right]+1$$

$x^2-3x = z$ رکھنے سے

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1 = z(z+2)+1$$

$$= z^2+2z+1$$

$$= (z+1)^2$$

اب رکھیے $z = x^2-3x$

$$x(x-1)(x-2)(x-3)+1 = (x^2-3x+1)^2$$

$$= \left[\pm(x^2-3x+1)\right]^2$$

دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{x(x-1)(x-2)(x-3)+1} = \pm(x^2-3x+1)$$

مثال 4:-

$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}), (x\neq o\,, y\neq o)$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x} = z$$

دونوں طرف مربع لینے سے

$$(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})^2 = z^2$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-2 = z^2$$

$$\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2} = z^2+2$$

$$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}) = (\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2)-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})$$

$$= z^2+2+2-4z$$

$$= z^2-4z+4$$

$$= (z-2)^2$$

$$= \left[\pm(z-2)\right]^2$$

$\left[\frac{x}{y}-\frac{y}{z}\right.$ رکھنے سے $\left.\right]$

$$(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}) = \left[\pm(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-2)\right]^2$$

دونوں طرف جذر المربع لینے سے

$$\sqrt{(\frac{x}{y}+\frac{y}{x})^2-4(\frac{x}{y}-\frac{y}{x})} = \pm(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}-2)$$

3.3.2 جذر بذریعہ طریقہ تقسیم معلوم کرنا Square Root by Division Method

ہم مندرجہ ذیل مثالوں سے بذریعہ طریقہ تقسیم جذر معلوم کرنے کی وضاحت کرتے ہیں۔

مثال 1:-

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ کا جذر معلوم کیجیے۔

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & \quad x + y + z \\
\hline
x & x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2 \\
 & \pm x^2 \\
\hline
2x + y & \quad 2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2 \\
 & \quad \pm 2xy \qquad\qquad \pm y^2 \\
\hline
2x + 2y + z & \qquad 2xz + 2yz + z^2 \\
 & \qquad \pm 2xz \pm 2yz \pm z^2 \\
\hline
 & \qquad\qquad 0
\end{array}
$$

مطلوبہ جذر المربع $\pm(x + y + z)$

(i) دیئے گئے جملے کو ترتیب نزولی میں لکھیے۔
پہلی رقم x^2 کا جذر المربع x لیجیے۔
جملے میں تفریق کرنے کے بعد $2xy + 2xz + 2yz + y^2 + z^2$ باقی بچتا ہے۔

(ii) حاصل قسمت x کو اس کے دوگنا $2x$ کو y سے ضرب دیجئے جو کہ باقی بچے کی پہلی رقم $2xy$ ہے۔
لہٰذا باقی بچے کو $2x + y$ سے تقسیم کیجیے تو ہمیں $2xz + 2yz + z^2$ نیا باقی بچتا ہے اور
$x + y$ حاصل قسمت ہوتے ہیں۔ جو کہ جذر المربع کی پہلی دو رقوم ہیں۔

(iii) باقی بچے ہوئے کو حاصل قسمت کے دوگنا $+ z$ سے تقسیم کیجیے۔ یعنی $2x + 2y + z$ تو حاصل قسمت
$x + y + z$ حل ہوا اور باقی صفر بچا۔ پس $\pm(x + y + z)$ مطلوبہ جذر ہے۔

مثال 2:-

$(x^2-\frac{1}{x^2})^2-12(x^2-\frac{1}{x^2})+36$ کا جذر معلوم کریں۔

حل:

$$(x^2-\frac{1}{x^2})^2-12(x^2-\frac{1}{x^2})+36$$

$$= x^4+\frac{1}{x^4}-2-12x^2+\frac{12}{x^2}+36$$

$$= x^4-12x^2+34+\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^4}$$ (ترتیب نزولی میں لکھنے سے)

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2-6-\frac{1}{x^2} \\
\hline
x^2 & x^4-12x^2+34+\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^4} \\
 & \pm x^4 \\
\hline
2x^2-6 & -12x^2+34+\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^4} \\
 & \pm 12x^2 \pm 36 \\
\hline
2x^2-12-\frac{1}{x^2} & -2+\frac{12}{x^2}+\frac{1}{x^4} \\
 & \mp 2 \pm \frac{12}{x^2} \pm \frac{1}{x^4} \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

پس $\pm(x^2-6-\frac{1}{x^2})$ مطلوبہ جذر ہے۔

$x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$ اور $x=\pm\sqrt{a} \Rightarrow x^2=a$

مثال 3:- $x^4 - 12x^3 + 217x + 320$ کو مکمل مربع بنانے کے لیے

(i) کیا جمع کیا جائے؟ (ii) کیا تفریق کیا جائے؟

(iii) x کی کس قیمت کے لیے مکمل مربع ہوگی؟

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 6x - 18 \\
\hline
x^2 & x^4 - 12x^3 + 0x^2 + 217x + 320 \\
 & \pm x^4 \\
\hline
2x^2 - 6x & -12x^3 + 0x^2 + 217x + 320 \\
 & \pm 12x^3 \pm 36x^2 \\
\hline
2x^2 - 12x - 18 & -36x^2 + 217x + 320 \\
 & \mp 36x^2 \pm 216x \pm 324 \\
\hline
 & x - 4
\end{array}
$$

(i) $-x + 4$ جمع کرنے سے جملہ مکمل مربع ہوگا۔

(ii) $x - 4$ تفریق کرنے سے جملہ مکمل مربع ہوگا۔

(iii) اگر $x - 4 = 0$ یعنی $x = 4$ ہو تو جملہ ایک مکمل مربع ہوگا۔

مثال 4:-

'ℓ' اور 'm' کی کس قیمت کے لیے جملہ $4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - \ell x + m$ ایک مکمل مربع ہوگا؟ جبکہ $x \neq 0$

حل:

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 4 \\
\hline
2x^2 & 4x^4 - 12x^3 + 25x^2 - \ell x + m \\
 & \pm 4x^4 \\
\hline
4x^2 - 3x & -12x^3 + 25x^2 \\
 & \mp 12x^3 \pm 9x^2 \\
\hline
4x^2 - 6x + 4 & 16x^2 - \ell x + m \\
 & \pm 16x^2 \mp 24x \pm 16 \\
\hline
 & (-\ell + 24)x + (m - 16) \text{ باقی بچا}
\end{array}
$$

دیا گیا جملہ مکمل مربع ہوگا اگر باقی بچا $(-\ell+24)x+(m-16)$ کی قیمت صفر کے برابر ہو۔
ایسا ممکن ہوگا اگر

$$-\ell+24=0 \quad \text{اور} \quad m-16=0$$

$$\ell=24 \quad \text{اور} \quad m=16$$

لہٰذا $\ell=24$ اور $m=16$ کے لیے دیا گیا جملہ ایک مکمل مربع ہوگا۔

مشق 3.6

درج ذیل کا جذر المربع معلوم کیجیے۔

1. $16x^2+24xy+9y^2$
2. $(x^2-7x+12)(x^2-9x+20)(x^2-8x+15)$
3. $(x^2+8x+7)(2x^2-x-3)(2x^2+11x-21)$
4. $x(x+2)(x+4)(x+6)+16$
5. $(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7)+16$
6. $(x^2+\frac{1}{x^2})-10(x+\frac{1}{x})+27, x\neq 0$
7. $(t-\frac{1}{t})^2-4(t+\frac{1}{t})+8, (t\neq 0)$
8. $(x^2+\frac{1}{x^2})^2-4(x+\frac{1}{x})^2+12, x\neq 0$
9. $4x^4+12x^3+25x^2+24x+16$
10. $\frac{9x^2}{4y^2}-\frac{3x}{2y}-\frac{7}{4}+\frac{2y}{3x}+\frac{4x^2}{9y^2}, (x\neq 0, y\neq 0)$
11. 'x' کی کس قیمت کے لیے $x^4+4x^2+x+\frac{8}{x^2}+\frac{4}{x^4}$ ایک مکمل مربع ہے۔ جبکہ $x\neq o$
12. اگر $x^4+\ell x^3+mx^2+12x+9$ ایک مکمل مربع ہو تو ℓ اور m کی قیمتیں معلوم کریں۔

جائزہ مشق-3

I- صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگائیں۔

1. $\dfrac{\text{دو الجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{ذو اضعاف اقل}} = ?$

(a) عاد اعظم (b) ذو اضعاف اقل
(c) ذو اضعاف اقل × عاد اعظم (d) عاد اعظم + ذو اضعاف اقل

2. ذو اضعاف اقل معلوم کرنے کے طریقے ہیں

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

3. عاد اعظم معلوم کرنے کے طریقوں کی تعداد ہے۔

(a) 4 (b) 1 (c) 2 (d) 3

4. $12pq,\ 8p^2q$ کا عاد اعظم ہے۔

(a) $4pq$ (b) $4p^2q^2$ (c) $4pq^2$ (d) $4p^2q$

5. $2x^2+3x+1,\ \ 2x^2-x-1$ کا عاد اعظم ہے۔

(a) $2x-1$ (b) $2x+1$ (c) $x+1$ (d) $x-1$

6. $6pqr,\ 15qrs$ کا عاد اعظم ہے۔

(a) $3qr$ (b) $3pqr$ (c) $3pqrs$ (d) $15pqrs$

7. $12p^3q^2,\ 8p^2$ کا ذو اضعاف اقل ہے۔

(a) $24pq^2$ (b) $24p^3q$ (c) $24p^3q^2$ (d) $12p^2q$

8. دو الجبری جملوں کا حاصل ضرب =

(a) عاد اعظم (b) ذو اضعاف اقل
(c) ذو اضعاف اقل × عاد اعظم (d) ذو اضعاف اقل + عاد اعظم

9. $\dfrac{\text{دو الجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{H.C.F} =$

(a) ذو اضعاف اقل (b) عاد اعظم
(c) 0 (d) عاد اعظم × ذو اضعاف اقل

10. $\dfrac{L.C.M \times H.C.F}{\text{پہلا جملہ}} =$

(a) دوسرا جملہ (b) 1 (c) عاد اعظم (d) ذو اضعاف اقل

II- خالی جگہ پر کریں۔

1. عاد اعظم معلوم کرنے کے طریقے ہیں = ____________

2. ذواضعاف اقل معلوم کرنے کے طریقے ہیں = ____________

3. دوالجبری جملوں کا حاصل ضرب = ____________ × ذواضعاف اقل

4. $\dfrac{\text{دوالجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{ذواضعاف اقل}}$ = ____________

5. $\dfrac{\text{دوالجبری جملوں کا حاصل ضرب}}{\text{عاد اعظم}}$ = ____________

6. $\dfrac{\text{عاد اعظم} \times \text{ذواضعاف اقل}}{\text{پہلا جملہ}}$ = ____________

7. $2x^2 + 3x + 1,\ 4x^2 - 1$ کا عاد اعظم ہے ____________

8. $x^3 + 8,\ x^2 - 4$ کا عاد اعظم ہے ____________

9. $2x^3y^3,\ 4x^2y^4$ کا عاد اعظم ہے ____________

10. $3x^2y^2,\ 2xyz$ کا ذواضعاف اقل ہے ____________

خلاصہ

عاد اعظم:

دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا عاد اعظم زیادہ سے زیادہ درجہ کا جملہ ہوتا ہے جو اِن تمام جملوں کو تقسیم کرتا ہے۔

ذواضعاف اقل:

دو یا دو الجبری جملوں کا ذواضعاف اقل کم سے کم درجہ کا جملہ ہوتا ہے جو ان تمام جملوں سے بغیر "باقی بچا" کے پورا پورا تقسیم ہوتا ہے۔

یونٹ

4

خطی مساواتیں اور غیر مساواتیں

LINEAR EQUATIONS AND INEQUALITIES

- خطی مساواتیں
- مطلق قیمت والی مساوات
- خطی غیر مساواتیں
- خطی غیر مساواتوں کا حل

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ایک متغیر والی خطی مساوات کو سمجھ سکیں۔
- جذری مساوات کو سادہ خطی مساوات میں تحویل کر کے ان کا حل معلوم کر سکیں۔
- مطلق قیمت کی تعریف کر سکیں۔
- ایک متغیر والی مطلق قیمت کی مساوات کو حل کر سکیں۔
- غیر مساواتیں $(<, >)$ اور $(\leq, \geq)$ کی تعریف کر سکیں۔
- غیر مساواتوں کی خاصیتوں (جیسا کہ خاصیت ثلاثی، خاصیت متعدیت، جمعی خاصیت، ضربی خاصیت) کو پہچان کر سکیں۔
- طاق عددی سروں والی غیر مساواتوں کو حل کر سکیں۔

4.1 خطی مساوات LINEAR EQUATIONS

ایسا بیان جس میں دو الجبری جملوں کو برابری کی علامت " = " سے جوڑا گیا ہو مساوات کہلاتا ہے۔ یک درجی کثیر رقمی والی مساوات خطی مساوات کہلاتی ہیں۔ مساوات $ax+b=0$، $a \neq 0$ ایک متغیر میں خطی مساوات کی معیاری صورت ہے۔

مثلاً

(i) $7x+3 = 5$ (ii) $\frac{3}{2}x+4 = \frac{1}{3}$

(iii) $\frac{1}{2}(t+3)-2t = 5$ (iv) $\frac{5}{3}y+4 = \frac{y-2}{4}$

4.1.1 ایک متغیر میں خطی مساوات Linear Equation In One Variable

ایسی مساوات جو $ax+b = 0$ ، $a \neq 0$ .... (i) کی صورت میں لکھی جا سکے، جبکہ "a , b" مستقل مقداریں اور 'x' متغیر ہے۔ ایک متغیر میں یک درجی مساوات کہلاتی ہے۔

مساوات (i) کو ہمیشہ حل کیا جا سکتا ہے۔

$$ax+b = 0 \qquad a \neq 0$$
$$ax = -b$$
$$x = \frac{-b}{a}$$

مساوات (i) کا حل ہے۔

مثال:-

ثابت کیجیے کہ $x = 2$ مساوات $5x-12 = -2$ کا حل ہے۔

حل:

مساوات میں $x = 2$ رکھنے سے

$$L.H.S = 5x-12 = 5\times(2)-12$$
$$= 10-12 = -2 = R.H.S$$

مساوات کو حل کرنے کے قوانین:

(i) مساوات کو تبدیل کیے بغیر دونوں طرف یکساں مقدار کو جمع یا تفریق کیا جاسکتا ہے۔

(ii) مساوات کی دونوں طرف ایک ہی غیر صفری عدد سے ضرب دینے سے مساوات تبدیل نہیں ہوتی۔

(iii) مساوات کی دونوں طرف ایک ہی غیر صفری عدد سے تقسیم کرنے سے مساوات تبدیل نہیں ہوتی۔

(iv) ٹرانسپوزیشن:

طرفین کی برابری متاثر ہوئے بغیر کسی بھی رقم کو مساوات کی ایک جانب سے دوسری جانب علامت کی تبدیلی کے ساتھ منتقل کیا جاسکتا ہے اس عمل کو ٹرانسپوزیشن کہتے ہیں۔

مثال:-

$5x-6 = 4x-2$ حل کریں۔

حل: ہمیں علم ہے کہ $5x-6 = 4x-2$

$5x-4x = -2+6$ ($4x$ کو $L.H.S$ اور -6 کو $R.H.S$ منتقل کرنے سے)

لہٰذا $x = 4$ مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = 4$ رکھنے سے

$$L.H.S = 5\times(4)-6 = 20-6 = 14$$

$$R.H.S = 4\times(4)-2 = 16-2 = 14$$

$$L.H.S = R.H.S$$

پس: $x = 4$ مساوات کا حل ہے۔

4.1.2 خطی مساوات کا حل: Solution of a Linear Equation

متغیر کی کوئی ایسی قیمت جو مساوات کو درست بیان ثابت کردے۔ مساوات کا حل کہلاتی ہے (یا مساوات کا روٹ) –

مساوات کو حل کرنے سے مراد متغیر کی ایسی قیمت معلوم کرنا ہے۔ جو کہ مساوات کو درست بیان ثابت کر سکے (یا مساوات کے معیار پر پورا اُترے)۔

مثال 1:- $3x+\frac{1}{5} = 2-x$ کو حل کریں۔

حل:

$$3x+\frac{1}{5} = 2-x$$

یا $3x+x = 2-\frac{1}{5}$ ($-x$ کو L.H.S اور $\frac{1}{5}$ کو R.H.S ٹرانسپوز کرنے سے)

یا $4x = \frac{9}{5}$

یا $\frac{1}{4}\times 4x = \frac{1}{4}\times\frac{9}{5}$ (دونوں اطراف کو 4 پر تقسیم کرنے سے)

$$x = \frac{9}{20}$$

پس $x = \frac{9}{20}$ دی گئی مساوات کا حل ہے

پڑتال: مساوات میں $x = \frac{9}{20}$ رکھنے سے

$$L.H.S = 3\times\frac{9}{20}+\frac{1}{5} = \frac{27}{20}+\frac{1}{5} = \frac{31}{20}$$

$$R.H.S = 2-\frac{9}{20} = \frac{31}{20}$$

$$\therefore\ L.H.S = R.H.S$$

پس $x = \frac{9}{20}$ دی گئی مساوات کا حل ہے

مثال 2:- $2y+\frac{11}{4} = \frac{1}{3}y+2$ کو حل کریں۔

حل: ہمیں علم ہے کہ $2y+\frac{11}{4} = \frac{1}{3}y+2$

$2y-\frac{1}{3}y = 2-\frac{11}{4}$ ($\frac{1}{3}y$ کو L.H.S اور $\frac{11}{4}$ کو R.H.S ٹرانسپوز کرنے سے)

$$\frac{5}{3}y = \frac{-3}{4}$$

$\frac{3}{5}\times\frac{5y}{3} = \frac{3}{5}\times\left(\frac{-3}{4}\right)$ (دونوں اطراف $\frac{3}{5}$ سے ضرب دینے سے)

$$y = \frac{-9}{20}$$

پس $y = \frac{-9}{20}$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: $y = \frac{-9}{20}$ مساوات میں رکھنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$L.H.S = 2 \times \left(\frac{-9}{20}\right) + \frac{11}{4} = \frac{-9}{10} + \frac{11}{4} = \frac{37}{20}$$

$$R.H.S = \frac{1}{3} \times \left(\frac{-9}{20}\right) + 2 = \frac{-3}{20} + 2 = \frac{37}{20}$$

$$\therefore\ L.H.S = R.H.S$$

پس $y = \frac{-9}{20}$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

مثال 3:- $\frac{1}{4}x + \frac{1}{6}x = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ حل کیجیے۔

حل: 4,6,2,4 کا ذواضعاف اقل 12 ہے۔

مساوات کے دونوں طرف 12 سے ضرب دینے سے

$$3x + 2x = 6x + 9$$

یا $5x = 6x + 9$

یا $6x - 5x = -9$ [5x اور 9 کو ٹرانسپوز کرنے سے]

یا $x = -9$

پس $x = -9$ دی گئی مساوات کا حل۔

پڑتال: مساوات میں $x = -9$ رکھنے سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$L.H.S = \frac{1}{4} \times (-9) + \frac{1}{6} \times (-9) = \frac{-9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{-15}{4}$$

$$R.H.S = \frac{1}{2} \times (-9) + \frac{3}{4} = \frac{-9}{2} + \frac{3}{4} = \frac{-15}{4}$$

$$\therefore\ L.H.S = R.H.S$$

پس $x = -9$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

مثال 4:- حل کیجیے۔ $\frac{5x-4}{8} - \frac{x-3}{5} = \frac{x+6}{4}$

حل:

$$\frac{5x-4}{8} - \frac{x-3}{5} = \frac{x+6}{4}$$

طرفین کو 4 ,5 ,8 کے ذواضعاف اقل 40 سے ضرب دینے سے

$$5(5x-4) - 8(x-3) = 10(x+6)$$

یا $25x - 20 - 8x + 24 = 10x + 60$

یا $17x + 4 = 10x + 60$

یا $17x - 10x = 60 - 4$ [10x کو L.H.S اور 4 کو R.H.S ٹرانسپوز کرنے سے]

یا $7x = 56$

یا $x = \frac{56}{7} = 8$ [دونوں اطراف $\frac{1}{7}$ سے ضرب دینے سے]

پس $x = 8$ دی گئی مساوات کا حاصل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = 8$ رکھنے سے

$$L.H.S = \frac{5\times8-4}{8} - \frac{8-3}{5} = \frac{36}{8} - 1 = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

$$R.H.S = \frac{8+6}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

$\therefore\ L.H.S = R.H.S$

پس $x = 8$ دی گئی مساوات کا حاصل ہے۔

ہمیں جس بات کا علم ہونا چاہیے:

- ایسی خطی مساوات کو کیسے حل کریں کہ جس کے دونوں اطراف نامعلوم (متغیر) قیمتیں ہوں۔
- جملوں اور کلیوں میں رقموں کو سمجھنا کیسے ہے؟
- منفی کی علامت والی مساواتوں کو کیسے حل کیا جائے؟

مثال 5:- $x-\left[2x-\frac{3x-4}{7}\right]=\frac{4x-27}{3}-3$ کو حل کریں۔

حل:
$$x-\left[2x-\frac{3x-4}{7}\right]=\frac{4x-27}{3}-3$$

بریکٹوں کو ختم کرنے سے

$$x-2x+\frac{3x-4}{7}=\frac{4x-27}{3}-3$$

یا $$-x+\frac{3x-4}{7}=\frac{4x-27}{3}-3$$

دونوں طرف 3 ,7 کے ذواضعاف اقل 21 سے ضرب دینے سے

$$-21x+3(3x-4)=7(4x-27)-63$$

یا $$-21x+9x-12=28x-189-63$$

یا $$-12x-12=28x-252$$

یا $$-12x-28x=-252+12$$ [ٹرانسپوزیشن سے]

یا $$-40x=-240$$

یا $$x=6$$ [دونوں طرف 40- پر تقسیم کرنے سے]

پس $x=6$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x=6$ رکھنے سے

$$L.H.S=6-\left[2\times6-\frac{3\times6-4}{7}\right]=6-\left(12-\frac{14}{7}\right)=6-(12-2)$$
$$=6-10=-4$$

$$R.H.S=\frac{4\times6-27}{3}-3=\frac{-3}{3}-3=-1-3=-4$$

$$\therefore\ L.H.S=R.H.S$$

پس $x=6$ دی گئی مساوات کا حاصل ہے۔

ہمیں جس بات کا علم ہونا چاہیے:

- بریکٹ کے باہر (_) علامت کو کیسے استعمال کرنا ہے۔

مثال 6:- $0.3x+0.4 = 0.28x+1.16$ کو حل کریں۔

حل:
$$0.3x+0.4 = 0.28x+1.16$$

یا $0.3x-0.28x = 1.16-0.4$ [ٹرانسپوزیشن سے]

یا $0.02x = 0.76$

یا $x = \frac{0.76}{0.02} = \frac{76}{2} = 38$

پس $x = 38$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = 38$ رکھنے سے

$$L.H.S = 0.3\times 38+0.4 = 11.4+0.4 = 11.8$$
$$R.H.S = 0.28\times 38+1.16 = 10.64+1.16 = 11.8$$
$$\therefore\ L.H.S = R.H.S$$

پس $x = 38$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

مثال 7:- $3x-2(2x-5) = 2(x+3)-8$ کو حل کریں۔

حل:
$$3x-2(2x-5) = 2(x+3)-8$$
$$3x-4x+10 = 2x+6-8$$
$$-x+10 = 2x-2$$
$$3x-2 = 10$$
$$3x = 12$$
$$x = 4$$

پس $x = 4$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

پڑتال: مساوات میں $x = 4$ رکھنے سے

$$3(4)-2(2\times 4-5) = 2(4+3)-8$$
$$12-2(8-5) = 2(7)-8$$
$$12-6 = 14-8$$
$$6 = 6$$

پس $x = 4$ دی گئی مساوات کا حل ہے۔

4.1.3 جذری مساوات Equations Involving Radicals

کوئی سے دو قدرتی اعداد کے لیے

$$\sqrt{x} \times \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

دوسری طرح سے

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\ \sqrt{y}$$

درج ذیل جیسی مساوات کو حل کرتے ہوئے

$$\sqrt{x-1} = 5 \qquad \text{............(1)}$$

دونوں طرف مربع لینے سے $x - 1 = 25$

$$x = 26$$

جو کہ مساوات (1) کا حل ہے

اسی طرح ہم اس مساوات کو حل کرتے ہیں

$$\sqrt{x-1} = -5 \qquad \text{............(2)}$$

$x - 1 = 25$ (دونوں اطراف کا مربع لینے سے)

$$x = 26$$

مساوات (2) کا حل نہیں ہے۔

کیونکہ $5 \neq -5$

اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\{x \mid x = 5\} = \{5\}$$

$$\{x \mid x^2 = 25\} = \{-5, 5\}$$

جذری مساواتوں میں بے اصل حل بھی نکل آتے ہیں جو کہ اصل مساوات کے حل نہیں ہوتے۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ مساوات $x = 5$ کا حل سیٹ مساوات $x^2 = 25$ کے حل سیٹ کا سب سیٹ ہے جو کہ $x = 5$ کے طرفین کا مربع لینے سے حاصل ہوتا ہے۔

یہ بات یاد رکھنے کی ہے کہ کوئی بھی نئی مساوات جو کہ کسی مساوات کے دونوں طرف ایک جیسی قوت لینے سے حاصل ہوتی ہے اس کے بے اصل حل ہو سکتے ہیں۔ جو کہ اصل مساوات کا حل نہیں ہوتے دوسری طرف اصل مساوات کے حل میں کوئی حل ایسا بھی ہو سکتا ہے جو نئی مساوات سے تعلق رکھتا ہو۔

لہٰذا نئی مساوات کا ہر حل اصل مساوات میں رکھ کر پڑتال کر لینا چاہیے تا کہ بے اصل حذف کیے جا سکیں۔

مثال 1:-

$x+\sqrt{x-4} = 4$ حل کیجیے۔

حل:

$$x+\sqrt{x-4} = 4$$

$$\sqrt{x-4} = 4-x$$ (جذری علامت ایک طرف رکھنے سے)

$$x-4 = 16-8x+x^2$$ (دونوں اطراف کا مربع لینے سے)

$$x^2-9x+20 = 0$$ (دو درجی مساوات حل کرنے سے)

$$(x-5)(x-4) = 0$$

$$x = 5,4$$

فالتو اصل حل دور کرنے کے لیے پڑتال کریں (اگر کوئی ہے تو)

$$x = 5 \quad , \quad x = 4$$

$$5+\sqrt{5-4} = 4 \quad , \quad 4+\sqrt{4-4} = 4$$

$$5+1 \neq 4 \quad , \quad 4 = 4$$

لہٰذا $x = 5$ حل نہیں ہے	$x = 4$ حل ہے

پس $\therefore$ حل سیٹ $= \{4\}$

یاد رکھیں کہ:

- بعض فارمولے مربع اور جذر المربع کے ساتھ استعمال ہوتے ہیں۔
- مربع اور جذر المربع ایک دوسرے کے بالعکس ہیں۔
- مربع کو ختم کرنے کے لیے جذر المربع لیا جاتا ہے۔
- جذر المربع ختم کرنے کے لیے مربع لیا جاتا ہے۔

مثال 2:-

$\sqrt{3x-2} - \sqrt{x} = 2$ حل کیجیے۔

حل:

$$\sqrt{3x-2} = 2+\sqrt{x}$$

$$3x-2 = 4+4\sqrt{x}+x$$ (دونوں طرف مربع لینے سے)

$$3x-x-2-4 = 4\sqrt{x}$$

$$2x-6 = 4\sqrt{x}$$

$$x-3 = 2\sqrt{x}$$ (طرفین کو 2 سے تقسیم کرنے سے)

$$x^2-6x+9 = 4x$$ (طرفین کا مربع لینے سے)

$$x^2-10x+9 = 0$$

$$(x-9)(x-1) = 0$$

$$x = 1, 9$$

بے اصل حل دور کرنے کے لیے پڑتال کریں

$x = 9$	$x = 1$
$\sqrt{3\times 9-2} - \sqrt{9} = 2$	$\sqrt{3\times 1-2} - \sqrt{1} = 2$
$\sqrt{25} - 3 = 2$	$\sqrt{1} - \sqrt{1} = 2$
$5-3 = 2$	$0 \neq 2$
$x = 9$ حل ہے	$x = 1$ حل نہیں ہے

$\therefore$ حل سیٹ $= \{9\}$

یاد رہے کہ:

جذر المربع ختم کرنے کے لیے طرفین کا مربع لیں : $s = \sqrt{t+r}$

'r' تفریق کرنے سے : $s^2 = t+r$

$$s^2-r = t \Rightarrow t = s^2-r$$

مشق 4.1

حل کریں۔

1. (i) $3x+20=44$ (ii) $\frac{4x}{5}-\frac{3x}{4}=4$

   (iii) $3x+3(x+1)=69$ (iv) $(90-9x)+27=90+9$

2. $3(x+3)=14+x$

3. $3(2x+5)=25+x$

4. $9x-3=3(2x-8)$

5. $3(2x-1)=5(x-1)$

6. $2(7x-6)=3(1+3x)$

7. $\frac{10x-1}{2x+5}=3$

8. $\frac{2x+1}{x+5}=1$

9. $\frac{5x+3}{x+6}=2$

10. $y-6+\sqrt{y}=0$

11. $x=15-2\sqrt{x}$

12. $m-13=\sqrt{m+7}$

13. $\sqrt{5n+9}=n-1$

14. $3+\sqrt{2x-1}=0$

15. $\sqrt{x+5}+7=0$

16. $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-4}=2$

17. $\sqrt{x+1}=3$

18. $\sqrt{2x-1}=5$

19. $\sqrt{x-1}=10$

20. $\sqrt{3x+4}=7$

4.2 مطلق قیمت والی مساواتیں: EQUATIONS INVOLVING ABSOLUTE VALUE

اس حصہ میں ہم مطلق قیمت والی مساواتوں کو حل کرنا سیکھیں گے۔

4.2.1 مطلق قیمت: Absolute Value

ہر حقیقی عدد 'x' کی مطلق قیمت کو |x| سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کا تعارف یہ ہے کہ

$$|x| = \begin{cases} x & \text{اگر } x > 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \\ -x & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

مثلاً

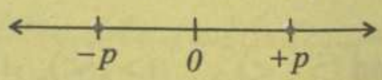
$$|8| = 8$$

$$|-8| = -(-8) = 8$$

4.2.2 مطلق قیمت والی مساواتیں: EQUATIONS INVOLVING ABSOLUTE VALUE

درج بالا تعریف کو استعمال کرتے ہوئے ہمیں مشکل پیش نہیں آئے گی کہ $p > 0$

$$|x| = p \Leftrightarrow x = \pm p$$

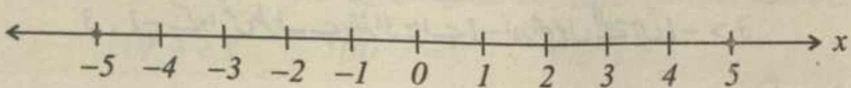


مثال:-

حل کیجیے۔ (i) $|x| = 5$ (ii) $|x-3| = 5$ (iii) $|x+2| = 3$

حل:

(i) $|x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$



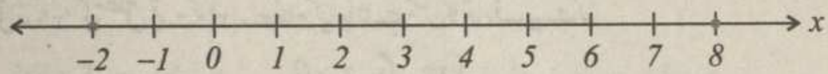
(ii) $|x-3| = 5 \Rightarrow x-3 = \pm 5$

$x-3 = 5$ یا $x-3 = -5$

$x = 8$ یا $x = -5+3$

$x = -2$

$x = -2$ یا 8



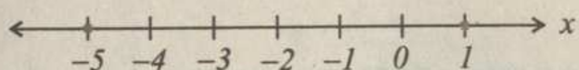
(iii) $|x+2| = 3 \Rightarrow x+2 = \pm 3$

$x+2 = 3$ یا $x+2 = -3$

$x = 3-2$ یا $x = -3-2$

$x = 1$ یا $x = -5$

$x = 1$ یا -5



4.3 خطی غیر مساواتیں LINEAR INEQUALITIES

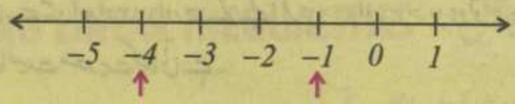
ہم عددی خط پر عددوں کی ترتیب کو جانتے ہیں۔ عددی خطوط پر کسی عدد کے دائیں جانب والا عدد بڑا اور اس کے بائیں جانب والا چھوٹا ہوتا ہے۔

4.3.1 غیر مساواتیں (> , <) اور (≥ , ≤): Inequalities (> , <) And (≥ , ≤)

ہم علامات '>' استعمال کرتے ہیں ''بڑا ہے'' کے لیے اور علامت '<' استعمال کرتے ہیں ''چھوٹا ہے'' کے لیے۔

مثلاً

3 ، 1- کے دائیں طرف ہے، لہٰذا 3 بڑا ہے 1- اور ہم یوں لکھتے ہیں $3 > -1$



-4 ، -1 کے بائیں جانب ہے، لہٰذا -4 چھوٹا ہے -1 سے اور ہم لکھتے ہیں $-4 < -1$

ہم لکھتے ہیں $a < b$ اور پڑھتے ہیں a چھوٹا ہے b سے صرف اور صرف اگر کوئی مثبت حقیقی عدد P اس طرح ہو کہ

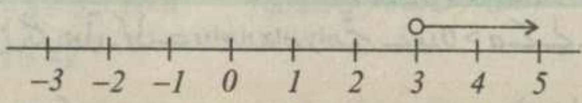
$$a + p = b;$$

ہم $a > b$ لکھتے ہیں اور پڑھتے ہیں ''a، b سے بڑا ہے''۔ ہم لکھتے ہیں $a \le b$ صرف اور صرف $a < b$ یا $a = b$
اور ہم لکھتے ہیں $a \ge b$ صرف اور صرف $a > b$ یا $a = b$

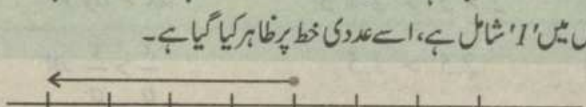
علامات "<" ، ">" ، "≤" اور "≥" ترتیبی تعلقات یا غیر مساواتوں کی علامات کہلاتی ہیں۔

دو الجبری جملے غیر مساواتوں کی علامت سے جڑے جیسا کہ $7(3x-2)+\frac{x}{5} < 2x-\frac{2}{3}$ ایک غیر مساوات فقرہ یا صرف غیر مساوات کہلاتا ہے۔

$x > 3$ کا مطلب ہے x کی قیمت 3 سے بڑی ہے اور x کی قیمت 3 نہیں ہے۔
اسے عددی خط پر ظاہر کیا جاتا ہے۔



$x \le 1$ کا مطلب ہے کہ x کی قیمت 1 سے چھوٹی ہے یا 1 کے برابر ہے
اس میں '1' شامل ہے، اسے عددی خط پر ظاہر کیا گیا ہے۔



4.3.2 غیر مساواتوں کی خصوصیات Properties Of Inequalities

ثلاثی خاصیت: عددی خط پر دو نمبروں x اور y کے لیے درج ذیل میں سے صرف کوئی ایک بیان درست ہوگا۔

(i) $x > y$ (ii) $x = y$ (iii) $x < y$

یہ قانون ثلاثی کہلاتا ہے۔

خاصیت متعدیت: کوئی سے تین اعداد x, y اور z کے لیے اگر $x > y$ اور $y > z$ ہو تو $x > z$ ہوگا۔ یہ غیر مساواتوں کی خاصیت متعدیت کہلاتی ہے۔

مثلاً اگر $x = 10$، $y = 5$ اور $z = 2$ ہو تو $10 > 5$، $5 > 2$ اور $10 > 2$

جمعی خاصیت: کسی غیر مساوات کے دونوں اطراف ایک ہی عدد جمع کرنے یا ایک ہی عدد تفریق کرنے سے غیر مساوات تبدیل نہیں ہوتی۔ کسی دو اعداد x اور y اور مثبت عدد 'a' کے لیے۔

اگر $x > y$	مثلاً $5 > 3$ اور $< 2 - 0$
$x + b > y + b$	$5 - (+2) > 3 - (+2)$
اور $x - b > y - b$	$5 - (-2) > 3 - (-2)$
	$5 + 2$

یہی بات منفی عدد 'b' کے لیے بھی درست ہے۔

اگر $x > y$	مثلاً $5 > 3$ اور $-2 < 0$
تو $x + b > y + b$	$5 - 2 > 3 - 2$
اور $x - b > y - b$	$5 + 2 > 3 + 2$

ضربی خاصیت: ہم کسی غیر مساوات کے دونوں اطراف کو مثبت عدد سے ضرب دیں یا تقسیم کریں تو غیر مساوات کی سمت تبدیل نہیں ہوتی۔ کوئی سے دو اعداد x اور y اور تیسرے عدد $a > 0$ کے لیے۔

اگر $x > y$	مثلاً $5 > 3$ اور $2 > 0$
تو $ax > ay$	$2 \times 5 > 2 \times 3$
اور $\frac{x}{a} > \frac{y}{a}$	$2.5 > 1.5$

یہ بات منفی نمبر b کیلئے درست نہیں۔ جب کسی منفی عدد سے ضرب یا تقسیم کیا جاتا ہے تو عدم مساوات کی علامت اُلٹ جاتی ہے۔

اگر $x > y$ اور $b < 0$	مثلاً $5 > 3$ اور $-2 < 0$
تو $bx < by$	$(-2) \times 5 < (-2) \times 3$
اور $\frac{x}{b} < \frac{y}{b}$	$\frac{5}{-2} < \frac{3}{-2}$

4.4 عدم غیر مساواتوں کا حل: SOLVING LINEAR INEQUALITIES

غیر مساواتیں تقریباً مساواتوں ہی کی طرح حل ہوتی ہیں۔

مثال 1:-

غیر مساواتوں کو حل کریں۔

(i) $x+3<7$ (ii) $2x-1>5$ (iii) $6-x>4$

حل:

(i) $x+3<7$

$x+3-3<7-3$ (دونوں اطراف سے 3 تفریق کرنے سے)

$x<4$

(ii) $2x-1>5$

$2x-1+1>5+1$ (دونوں اطراف میں 1 جمع کرنے سے)

$2x>6$

$x>3$ (دونوں اطراف کو 2 پر تقسیم کرنے سے)

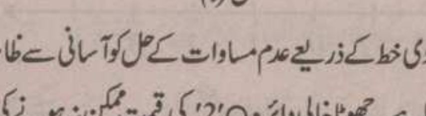
(iii) $6-x>4$

$6-x-6>4-6$ (دونوں اطراف سے 6 تفریق کرنے سے)

$-x>-2$

$x<2$ (دونوں اطراف 1- سے ضرب دینے اور $<$ کو $>$ میں بدلنے سے)

کسی غیر مساوات کے حل میں نقاط کیسے شامل کیے جاتے ہیں؟



شکل (i)

شکل نمبر (i) میں ظاہر کیے گئے عددی خط کے ذریعے عدم مساوات کے حل کو آسانی سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً $x<2$ کو عددی خط شکل (i) میں دکھایا گیا ہے۔ چھوٹا خالی دائرہ ○ '2' کی قیمت ممکن نہ ہونے کی علامت ہے۔ جبکہ 2 کی بائیں جانب کی قیمتیں شامل ہیں۔

مثال 2:-

$\frac{1}{3}x > \frac{1}{4}(x-1)$ غیر مساوات حل کریں۔

حل:

$$\frac{1}{3}x > \frac{1}{4}(x-1)$$

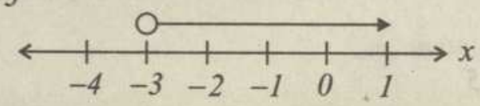
$$12 \times \frac{1}{3}x > 12 \times \frac{1}{4}(x-1)$$

$$4x > 3(x-1)$$

$$4x > 3x - 3$$

$$4x - 3x > -3$$

$$x > -3$$



شکل (ii)

حل کو شکل (ii) میں عددی خط کے ذریعے ظاہر کیا گیا ہے۔

مثال 3:-

$x - 7 \leq 5 - 2x$ غیر مساوات حل کریں۔

حل:

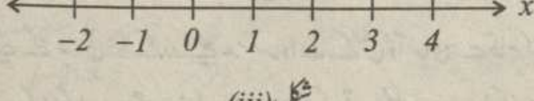
$$x - 7 \leq 5 - 2x$$

$$x + 2x - 7 \leq 5$$

$$3x \leq 5 + 7$$

$$3x \leq 12$$

$$x \leq 4$$



شکل (iii)

سیاہ دائرہ ظاہر کرتا ہے کہ 4 حل میں شامل ہے۔

مثال 4:-

$\frac{4x-3}{3}+8>6+\frac{3x}{2}$ حل کیجیے اور گراف بنایے۔

حل:

$$\frac{4x-3}{3}+8>6+\frac{3x}{2}$$

$$6\times\frac{4x-3}{3}+6\times8>6\times6+6\times\frac{3x}{2}$$

$$8x-6+48>36+9x$$

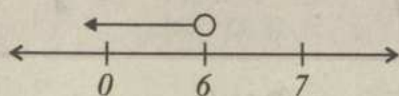
$$8x+42>36+9x$$

$$8x-9x+42>36$$

$$-x>36-42$$

$$-x>-6$$

$$x<6$$



شکل (iv)

حل کو عددی خط پر شکل (iv) میں دکھایا گیا ہے۔

یاد رکھیے کہ:

غیر مساواتیں عموماً الجبرا میں استعمال ہوتی ہیں۔ غیر مساواتیں، مساواتوں کی طرح ہی حل کی جاتی ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ:

- ہم غیر مساواتوں کے دونوں اطراف ایک ہی عدد جمع کر سکتے ہیں۔
- ایک ہی عدد غیر مساواتوں کے دونوں اطراف سے تفریق کر سکتے ہیں۔
- غیر مساواتوں کے دونوں اطراف کسی بھی مثبت عدد سے ضرب یا تقسیم کر سکتے ہیں۔

مشق 4.2

حل کیجیے اور پڑتال کیجیے۔

1. $|x| = 9$
2. $|x-3| = 4$
3. $|x+1| = 5$
4. $|2x-3| = 5$
5. $|3x+4| = 9$
6. $3(x-2) < 2x+1$
7. $3(x+5) > 2(x+2)+8$
8. $\frac{1}{2}(2-x) > \frac{1}{4}(3-x) + \frac{1}{2}$
9. $\frac{x-2}{4} + \frac{2}{3} < \frac{x-4}{6}$
10. $\frac{3x+4}{5} - \frac{x+1}{3} > 1 - \frac{x+5}{3}$
11. $\frac{x+1}{2} - \frac{x+3}{3} > \frac{x+1}{4} + 1$
12. $\frac{x+3}{4} \quad \frac{x+2}{5} < 1 + \frac{x+5}{6}$
13. $\frac{1}{2}x \geq 1 + \frac{1}{3}x$
14. $\frac{1}{4}(2x+3) \leq (7-4x)$
15. $\frac{4}{3}(2x+3) \geq 10 - \frac{4x}{3}$
16. $\frac{x-2}{4} - \frac{x-5}{6} \geq \frac{1}{3}$

جائزہ مشق -4

I- صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگایئے۔

1. مساوات جو $ax+b=0$ اور $a \neq 0$ کی صورت میں لکھی جا سکتی ہے۔جبکہ b،a مستقل مقداریں اور x متغیر ہو، کہلاتی ہے۔

(a) خطی مساوات (b) غیر مساوات
(c) حل (d) مستقل

2. وہ قیمت جو کسی مساوات کو درست ثابت کرے، کہلاتی ہے:

(a) مساوات (b) غیر مساوات
(c) حل (d) مستقل

3. ہر عدد x کی مطلق قیمت کو ظاہر کیا جاتا ہے۔

(a) x (b) $-x$
(c) $|x|$ (d) 0

4. علامت $\geq$ ظاہر کرتی ہے۔

(a) سے بڑا ہے (b) سے بڑا یا برابر ہے
(c) سے چھوٹا ہے یا برابر (d) کے برابر ہے

5. علامت $\leq$ ظاہر کرتی ہے۔

(a) سے چھوٹا ہے (b) سے بڑا یا برابر ہے
(c) سے چھوٹا یا برابر ہے (d) کے برابر ہے

6. $|x - 3| = 5$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) $\{8, -2\}$ (b) $\{-8, -2\}$
(c) $\{8, 2\}$ (d) $\{-8, 2\}$

7. $|x| = 3$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) 3 (b) -3
(c) ± 3 (d) 0

8. $|x - 1| = 4$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) $\{5, -3\}$ (b) $\{-5, -3\}$
(c) $\{-5, 3\}$ (d) $\{5, 3\}$

II- خالی جگہوں کو '$=$'، '$<$' یا '$>$' سے پر کر کے صحیح فقرہ بنائیے۔

1. اگر $15 > 10$ اور $10 > P$ تو 15 ______ P

2. اگر $-3 > x$ اور $x > y$ تو -3 ______ y

3. اگر $a < 60$ اور $60 < b$ تو a ______ b

4. اگر $x + 1 = y$ ہو تو x ______ y

5. اگر $m - 2 = n$ ہو تو m ______ n

6. اگر $x > y$ ہو تو $4x$ ______ $4y$

7. اگر $x > y$ ہو تو $\frac{x}{10}$ ______ $\frac{y}{10}$

8. اگر $x > y$ ہو تو $(-2)x$ ______ $(-2)y$

9. اگر $x > y$ ہو تو $\frac{y}{-3}$ ______ $\frac{x}{-3}$

10. اگر $p > q$ اور $q > 0$ ہو تو 0 ______ p

11. اگر $u > 0$ ہو تو 0 ______ $(-3)u$

12. اگر $u > 0$ ہو تو 0 ______ $\frac{u}{6}$

خلاصہ SUMMARY

خطی مساوات: ایسی مساوات جو $ax + b = 0$ ، $a \neq 0$ کی صورت میں لکھی جائے جبکہ a اور b مستقلات اور x ایک متغیر ہو، خطی مساوات کہلاتی ہے۔

خطی مساوات کا حل: مساوات میں موجود متغیر کی وہ قیمت جو اسے درست فقرہ بنائے مساوات کا حل کہلاتی ہے۔

مطلق قیمت: ہر حقیقی عدد 'x' کی مطلق قیمت $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جس کو یوں بیان کیا جاتا ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{اگر } x > 0 \\ 0, & \text{اگر } x = 0 \\ -x, & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

خطی غیر مساوات: اگر دو الجبری یک درجی جملوں کو غیر مساوات کی علامتوں $\geq , \leq , > , <$ سے جوڑا گیا ہو تو ایسی مساواتیں غیر مساواتیں کہلاتی ہیں۔

ثلاثی خاصیت: اگر $x , y \in R$ پھر $x > y$، $x = y$ یا $x < y$

متعدیت خاصیت: اگر $x , y , z \in R$ تو $x > y$، اور $y > z \Rightarrow x > z$

جمعی خاصیت: $\forall a , b , c \in R$ اگر $a > b$ ہو تو $a + c > b + c$ اور $a - c > b - c$

ضربی خاصیت: $\forall a , b , c \in R$ فرض کیا جائے $a > b$ تو $ac > bc$ اگر $c > 0$ اور $ac < bc$ اگر $c < 0$

یونٹ

5

QUADRATIC EQUATIONS دودرجی مساواتیں

- دودرجی مساوات
- دودرجی مساوات کا حل
- دودرجی مساوات کا کلیہ

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- دودرجی مساوات کی تعریف کر سکیں۔
- ایک متغیر میں دودرجی مساوات کو حل کر سکیں۔
  - بذریعہ تجزی
  - بذریعہ تکمیل مربع
- تکمیل مربع سے دودرجی مساوات کا کلیہ ثابت کر سکیں۔
- کلیہ کی مدد سے دودرجی مساوات کو حل کر سکیں۔
- حقیقی زندگی کے سادہ سوالات حل کر سکیں۔

5.1 دو درجی مساواتیں QUADRATIC EQUATIONS

ایک متغیر میں دو درجی مساوات ایک ایسی مساوات ہوتی ہے جس کو ہم درج ذیل صورت میں لکھ سکتے ہیں:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

جس میں x ایک متغیر ہے اور a، b، c حقیقی اعداد ہیں۔ ہم اسے دو درجی مساوات کی معیاری صورت کہتے ہیں۔

دو درجی مساوات ایک ایسی کثیر رقمی پر مشتمل ہوتی ہے جس میں متغیر کا زیادہ سے زیادہ قوت نما 2 ہوتا ہے۔

5.2 دو درجی مساوات کا حل SOLUTION OF A QUADRATIC EQUATION

ہم دو درجی مساوات کو درج ذیل طریقوں سے حل کر سکتے ہیں۔

(i) بذریعہ اجزائے ضربی (ii) بذریعہ تکمیل مربع (iii) دو درجی مساوات کا کلیہ

5.2.1 دو درجی مساوات کا حل بذریعہ اجزائے ضربی Solution of a Quadratic Equation by Factorization

دو درجی مساوات کی عمومی شکل $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ہوتی ہے۔ ہم اس مساوات کو صفری اجزائے ضربی کے قانون سے حل کر سکتے ہیں۔ جس کے مطابق

اگر $a \times b = 0$ ہو تو $a = 0$ یا $b = 0$ (یا دونوں a اور b صفر کے برابر ہوں گے) $a = 0, b = 0$

صفری اجزائے ضربی کا قانون صرف اور صرف اسی صورت میں کام دیتا ہے جب جملہ تجزی کی شکل میں ہو۔

مثال 1:- حل کریں $x^2 + 4x - 77 = 0$

حل:

$$x^2 + 4x - 77 = 0$$

$$(x-7)(x+11) = 0$$

$$x - 7 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 11 = 0$$

مساوات کو اس طرح لکھیں کہ اس کی دائیں طرف صفر ہو۔ بائیں طرف کو تجزی کی شکل میں لکھیے۔ صفری اجزائے ضربی کا قانون استعمال کرتے ہوئے ہر جزو ضربی کو صفر کے برابر لکھیے۔

صفری اجزائے ضربی قانون لگانے سے پہلے ایسی مساواتیں جو اجزائے ضربی کی شکل میں نہ لکھی گئی ہوں کو پہلے اجزائے ضربی بنا کر لکھنے کی ضرورت ہوتی ہے۔

یاد رکھیے مساوات کی دائیں طرف صفر ہونا چاہیے۔

> صحیح اعداد کے عددی سروں والی کثیر رقمی $ax^2 + bx + c$ کے یک درجی اجزائے ضربی صرف اور صرف اسی صورت میں ممکن ہو سکتے ہیں اگر ac کے دو ایسے صحیح عددی اجزائے ضربی ہوں جن کا مجموعہ b کے برابر ہو۔

مثال 2:- $6x^2 - 19x - 7 = 0$ بذریعہ تجزی حل کیجیے۔

حل:

معیاری صورت سے موازنہ کرنے سے

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \ a = 6 \ , \ b = -19 \ , \ c = -7$$

$$ac = 6(-7) = -42$$

$-42 = (-21)2$ اور $-21 + 2 = -19 = b$

پس $6x^2 - 19x - 7 = 0$

$$6x^2 - 21x + 2x - 7 = 0$$

$$3x(2x - 7) + 1(2x - 7) = 0$$

$$(2x - 7)(3x + 1) = 0$$

$2x - 7 = 0$ یا $3x + 1 = 0$

$x = \frac{7}{2}$ یا $x = \frac{-1}{3}$

حل سیٹ $= \left\{\frac{-1}{3} , \frac{7}{2}\right\}$

مثال 3:- $2x^2 = 3x$ حل کیجیے۔

حل:

$$2x^2 = 3x$$

$$2x^2 - 3x = 0$$

$$x(2x - 3) = 0$$

$x = 0$ یا $2x - 3 = 0$

$$x = \frac{3}{2}$$

حل سیٹ $= \left\{0 , \frac{3}{2}\right\}$

نوٹ: $x = 0 , \frac{3}{2}$ مساوات $2x^2 = 3x$ کے روٹس (اصل) کہلاتے ہیں۔

مثال 4:-

اگر $x = 3$ مساوات $x^2 + kx + 15 = 0$ کا حل ہو تو k کی قیمت معلوم کیجیے۔

مساوات کا دوسرا حل بھی معلوم کریں۔

حل: مساوات $x^2 + kx + 15 = 0$ میں $x = 3$ رکھنے سے

$$3^2 + 3k + 15 = 0$$

$$3k + 24 = 0 \Rightarrow k = -8$$

اب $x^2 - 8x + 15 = 0$

$15 = (-5)\times(-3)$ اور $(-5)+(-3) = -8 = b$

$$x^2 - 5x - 3x + 15 = 0$$

$$x(x-5) - 3(x-5) = 0$$

$$(x-3)\ (x-5) = 0$$

$x - 3 = 0$ یا $x - 5 = 0$

$x = 3$ یا $x = 5$

حل سیٹ $= \{3, 5\}$

5.2.2 دودرجی مساوات کا حل بذریعہ تکمیل مربع
Solution of a Quadratic Equation by Completing the Square Method

تکمیل مربع کے طریقہ سے معیاری صورت میں دودرجی مساوات کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں۔

$ax^2 + bx + c = 0$ ______ (1)

$(x + p)^2 = q$ ______ (2) جبکہ p, q مستقل مقداریں

تکمیل مربع کے بعد مساوات (2) کو آسانی سے حل کیا جا سکتا ہے۔

لیکن مساوات (1) کو مساوات (2) کی صورت میں کیسے لائیں؟

$x^2 + bx$ کی شکل کی دودرجی مساوات کثیر رقمی کا مربع مکمل کرنے کے لیے x والی رقم کے عددی سر b کے نصف کا مربع $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ جمع کریں۔

اس بات کا نوٹ کرنا اہم ہے کہ بیان کیے گئے طریقہ کا اطلاق اسی صورت میں ممکن ہے جب دی گئی دو درجی مساوات میں متغیر کے مربع والی رقم کا عددی سر 1 ہے۔

تکمیل مربع کے اہم کلیے:

(i) $(x+m)^2 = x^2 + 2mx + m^2$

(ii) $(x-m)^2 = x^2 - 2mx + m^2$

مثال 1:-

$x^2 + 6x - 2 = 0$ تکمیل مربع سے حل کریں۔

حل:

$$x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$x^2 + 6x - 2 + 2 = 2 \quad \leftarrow$$ دونوں اطراف 2 جمع کرنے سے

$$x^2 + 6x = 2$$

$$x^2 + 6x + (3)^2 = 2 + 3^2 \quad \leftarrow$$ بائیں جانب کا مربع مکمل کرنے کے لیے x کے عددی سر 6 کے نصف کا مربع مساوات کے دونوں طرف جمع کریں۔

$$(x+3)^2 = 11$$

$$x + 3 = \pm\sqrt{11}$$

$$x = -3 \pm \sqrt{11}$$

حل سیٹ $= \{-3+\sqrt{11}, -3-\sqrt{11}\}$

مثال 2:- $(x-3)^2 = 4$ حل کیجیے۔

حل:

$$(x-3)^2 = 4$$

$$x^2 - 6x + 9 = 4$$

$$x^2 - 6x = -5$$

$$x^2 - 6x + (3)^2 = -5 + 9$$

$$(x-3)^2 = 4$$

$$x = 3 \pm 2$$

$x = 5$ یا

$x = 1$ یا

حل سیٹ $= \{1, 5\}$

مثال 3:-

$3(x-2)^2 = x(x-2)$ کو تکمیل مربع کے طریقہ سے حل کیجیے۔

حل:

$$3(x^2-4x+4) = x^2-2x$$

$$3x^2-12x+12 = x^2-2x$$

$$3x^2-x^2-12x+2x = -12$$

$$2x^2-10x = -12$$

$$x^2-5x = -6$$

$$x^2-5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2 = -6+\left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = -6+\frac{25}{4} = \left(x-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2-\frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{5}{2}\pm\frac{1}{2}$$

$x = \frac{5}{2}+\frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$ یا

$x = \frac{5}{2}-\frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ یا

حل سیٹ $= \{2, 3\}$

مثال 4:-

$10x^2-12x = 15$ تکمیل مربع کے طریقہ سے حل کیجیے۔

حل:

$$10x^2-12x = 15$$

$$x^2-\frac{12}{10}x = \frac{15}{10}$$ ← '10' پر تقسیم کرنے سے

$$x^2-\frac{6}{5}x = \frac{3}{2} \Rightarrow x^2-\frac{6}{5}x+\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2+\frac{3}{2}$$ ← دونوں طرف $\left(\frac{3}{5}\right)^2$ جمع کرنے سے

$$\left(x-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}+\frac{3}{2} = \left(x-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{18+75}{50} \Rightarrow \left(x-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{93}{50}$$

$x-\frac{3}{5} = \pm\sqrt{\frac{93}{50}}$ یا $x = \frac{3}{5}\pm\frac{\sqrt{93}}{5\sqrt{2}}$

$x = \frac{3\sqrt{2}\pm\sqrt{93}}{5\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{93}}{5\sqrt{2}}$ یا $x = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{93}}{5\sqrt{2}}$

حل سیٹ $= \left\{\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{93}}{5\sqrt{2}} , \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{93}}{5\sqrt{2}}\right\}$

مثال 5:- $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+8} = \frac{1}{3}$ تجزی سے حل کریں۔

حل:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+8} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{x+8+x}{x(x+8)} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2x+8}{x^2+8x} = \frac{1}{3}$$

$$x^2+8x = 6x+24$$

$$x^2+2x-24 = 0$$

$$(x+6)\,(x-4) = 0$$

$x+6 = 0$ یا $x-4 = 0$

$x = -6$ یا $x = 4$

حل سیٹ $= \{4, -6\}$

مثال 6:- $2x+4 = \frac{7}{x}-1$ حل کیجیے۔

حل:

$$2x+4 = \frac{7}{x}-1$$

$$x(2x+4) = x(\frac{7}{x}-1)$$ ← x سے ضرب دینے سے

$$2x^2+4x = 7-x$$
$$2x^2+5x-7 = 0$$
$$(2x+7)(x-1) = 0 \longleftarrow$$

$a\times c = 2\times(-7) = -14$

$2x$	7	$7x$
$\downarrow x$	-1	$-2x$
$2x^2$	-7	$5x$

$(2x+7)(x-1)$

$$2x+7 = 0 \Rightarrow x = \frac{-7}{2}$$

یا $x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

حل سیٹ $= \left\{\frac{-7}{2}, 1\right\}$

مشق 5.1

I- بذریعہ تجزی حل کریں۔

1. $x^2-4x+12 = 0$
2. $x^2-6x+5 = 0$
3. $x^2 = 8-7x$
4. $5x = x^2+6$
5. $3x^2-10x+8 = 0$
6. $2x^2+15x-8 = 0$
7. $\frac{x}{4}(x+1) = 3$
8. $3x^2-8x-3 = 0$
9. $2x = \frac{2}{x}+3$
10. $5x^2-6x-8 = 0$
11. $(2x+3)(x-2) = 0$
12. $(2x+1)(5x-4) = 0$
13. $4x(3x-1)-2 = (2x-1)(5x+1)$

II- تکمیل مربع کے طریقہ سے حل کریں۔

14. $x^2-10x-3 = 0$
15. $x^2-6x-3 = 0$
16. $x^2+x-1 = 0$
17. $x^2+6x-3 = 0$
18. $2x^2-4x+1 = 0$
19. $2x^2-6x+3 = 0$
20. $3x^2+5x-4 = 0$
21. $x^2+mx+n = 0$
22. $11x^2 = 6x+21$
23. $2x^2+8x-26 = 0$
24. $5x^2-20x-28 = 0$
25. $x^2-11x-26 = 0$

5.3 دو درجی مساوات کا کلیہ THE QUADRATIC FORMULA

دو درجی کلیہ، دو درجی مساوات کو حل کرنے کے طریقوں میں سے ایک ہے۔ عموماً یہ کلیہ وہاں استعمال کیا جاتا ہے جہاں تجزی مشکل یا ناممکن ہوتی ہے۔

5.3.1 دو درجی کلیہ اخذ کرنا Derivation of Quadratic Formula

دو درجی مساوات کی عمومی شکل

$$ax^2+bx+c=0, \qquad a\neq 0$$

جبکہ a, b, c حقیقی اعداد ہیں۔

اب ہم تمام دو درجی مساواتوں کے حل میں استعمال ہونے والا تکمیل مربع کا طریقہ استعمال کرتے ہیں۔

$$ax^2+bx+c=0, \qquad a\neq 0$$

سب سے بڑے درجے والی رقم x^2 کا عددی سر '1' بنانے کے لیے مساوات کو 'a' سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=\frac{-c}{a}$$

x کے عددی سر $\frac{b}{a}$ کا نصف $\frac{b}{2a}$ کا مربع $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ بائیں طرف کا مربع مکمل کرنے کے لیے مساوات کے دونوں جانب جمع کرتے ہیں۔

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a} \Rightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

دو درجی مساوات کو حل کرنے کے طریقے
(i) تجزی کا طریقہ
(ii) تکمیل مربع کا طریقہ
(iii) دو درجی کلیہ کا استعمال

آخری مساوات دو درجی کلیہ کہلاتی ہے۔

مثال 1:-

$2x+\frac{3}{2}=x^2$ دو درجی کلیہ کی مدد سے حل کیجیے۔

حل:

$$2x+\frac{3}{2}=x^2$$

$$4x+3=2x^2 \leftarrow$$ کسر کو ختم کرنے کے لیے دونوں اطراف 2 سے ضرب دی اور مساوات کو معیاری صورت میں لکھا

$$2x^2-4x-3=0$$

چونکہ $a=2$
$b=-4$
$c=-3$

کلیہ $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

کلیہ میں قیمتیں درج کرنے سے

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$=\frac{4\pm\sqrt{16+24}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{40}}{4}$$

$$=\frac{4\pm2\sqrt{10}}{4}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$$

حل سیٹ $$=\left\{\frac{2+\sqrt{10}}{2}\ ,\ \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right\}$$

مثال 2:- $4x^2 + 3x - 2 = 0$ دو درجی کلیہ کی مدد سے حل کیجیے۔

حل:

$$4x^2 + 3x - 2 = 0$$

یہاں $a = 4\ ,\ b = 3\ ,\ c = -2$

کلیہ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

کلیہ میں قیمتیں درج کرنے سے

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(4)(-2)}}{2(4)}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 32}}{8}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{41}}{8}$$

حل سیٹ $= \left\{\frac{-3 + \sqrt{41}}{8}\ ,\ \frac{-3 - \sqrt{41}}{8}\right\}$

مثال 3:- $9x^2 - 42x + 49 = 0$ دو درجی کلیہ کی مدد سے حل کیجیے۔

حل:

$$9x^2 - 42x + 49 = 0$$

چونکہ $a = 9\ ,\ b = -42\ ,\ c = 49$

کلیہ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

کلیہ میں قیمتیں درج کرنے سے

$$x = \frac{-(-42) \pm \sqrt{(-42)^2 - 4(9)(49)}}{2(9)}$$

$$x = \frac{42 \pm \sqrt{1764 - 1764}}{18} \Rightarrow x = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$$

حل سیٹ $= \left\{\frac{7}{3}\right\}$

مثال 4:-

$(x+5)^2+(2x-1)^2-67 = (x+5)(2x-1)$ دو درجی کلیہ کی مدد سے حل کریں۔

حل:

$$(x+5)^2+(2x-1)^2-67 = (x+5)(2x-1)$$

معیاری صورت میں لانے کے لیے

$$x^2+10x+25+4x^2-4x+1-67 = 2x^2+10x-x-5$$

$$5x^2+6x-41 = 2x^2+9x-5$$

$$3x^2-3x-36 = 0$$

$$x^2-x-12 = 0 \longleftarrow \boxed{\text{3 پر تقسیم کرنے سے}}$$

معیاری صورت سے موازنہ کرنے سے

$$a = 1,\ b = -1,\ c = -12$$

کلیہ $$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

کلیہ میں قیمتیں درج کرنے سے

پس $$x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-12)}}{2(1)}$$

$$= \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}$$

$$= \frac{1\pm\sqrt{49}}{2}$$

$$x = \frac{1\pm 7}{2}$$

$$x = \frac{1+7}{2} \quad \text{یا} \quad x = \frac{1-7}{2}$$

$$x = 4 \quad \text{یا} \quad x = -3$$

حل سیٹ $= \{4, -3\}$

مثال 5:-

$\frac{x-5}{2x} = \frac{x-4}{3}$ دودرجی کلیہ کی مدد سے حل کریں۔

حل:

$$\frac{x-5}{2x} = \frac{x-4}{3}$$

$$3(x-5) = 2x(x-4)$$

$$3x-15 = 2x^2-8x$$

$$2x^2-11x+15 = 0$$

یہاں پر $a = 2\ ,\ b = -11\ ,\ c = 15$

کلیہ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$= \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2-4(2)(15)}}{2(2)}$$

$$= \frac{11 \pm \sqrt{121-120}}{4}$$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{11 \pm 1}{4}$$

$x = \frac{11+1}{4}$ یا $x = \frac{11-1}{4}$

$x = \frac{12}{4}$ یا $x = \frac{10}{4}$

$x = 3$ یا $x = \frac{5}{2}$

حل سیٹ $= \left\{3, \frac{5}{2}\right\}$

مشق 5.2

دودرجی کلیہ کی مدد سے حل کریں۔

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$

2. $(3 - 4x) = (4x - 3)^2$

3. $3x^2 + x - 2 = 0$

4. $10x^2 - 5x = 15$

5. $(x - 1)\ (x + 3) - 12 = 0$

6. $x(2x + 7) - 3(2x + 7) = 0$

7. $\frac{x + 1}{x + 4} = \frac{2x - 1}{x + 6}$, جبکہ $x \neq -4, -6$

8. $\frac{x}{6} + \frac{6}{x} = \frac{4}{x} + \frac{x}{4}$, جبکہ $x \neq 0$

9. $\frac{x + 4}{x - 4} + \frac{x - 4}{x + 4} = \frac{10}{3}$ جبکہ $x \neq -4$

10. $\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x - 2} = \frac{2}{x - 3}$ جبکہ $x \neq 1, 2, 3$

11. $(x + 4)\ (x - 1) + (x + 5)\ (x + 2) = 6$

12. $(2x + 4)^2 - (4x - 6)^2 = 0$

5.3.3 دو درجی مساواتوں کی مدد سے مسائل کا حل
Problems Involving Quadratic Equations

مثال 1:-

ایسے دو مسلسل مثبت طاق اعداد معلوم کریں جن کے مربعوں کا مجموعہ 130 ہو۔

حل: فرض کیا کہ

$$x = \text{پہلا طاق عدد}$$

$$x + 2 = \text{دوسرا طاق عدد}$$

بموجب شرط سوال

$$x^2 + (x+2)^2 = 130$$

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 130$$

$$2x^2 + 4x - 126 = 0$$

$$x^2 + 2x - 63 = 0$$ ← 2 پر تقسیم کرنے سے

$$x^2 + 9x - 7x - 63 = 0$$

$$x(x+9) - 7(x+9) = 0$$

$$(x+9)\,(x-7) = 0$$

$x + 9 = 0$ یا $x - 7 = 0$

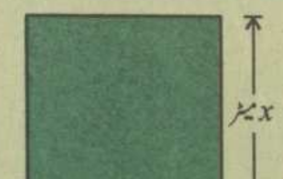
$x = -9$ یا $x = 7$

$x = -9$ حل نہیں ہے کیونکہ یہ ایک منفی عدد ہے۔

جب $x = 7$

$x + 2 = 7 + 2 = 9$

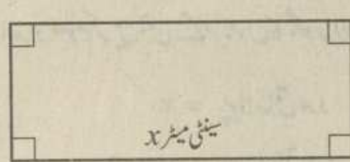
$\therefore$ دو مسلسل مثبت طاق اعداد 7، 9 ہیں



مربع کا رقبہ 10 مربع میٹر ہے۔
مربع کے ضلع کی لمبائی x میٹر ہے۔
ایسی مساوات لکھیے جو ظاہر کرے کہ مربع کا رقبہ 10 مربع میٹر ہے۔
x کی قیمت معلوم کرنے کے لیے مساوات کو حل کریں۔

مثال 2:-

مستطیل کا احاطہ 22 سینٹی میٹر اور اس کا رقبہ 24 مربع سینٹی میٹر ہے۔ مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کیجیے۔



حل: فرض کیا کہ

مستطیل کی لمبائی = x سینٹی میٹر

مستطیل کا احاطہ = 2(لمبائی + چوڑائی)

$\therefore$ $22 = 2(x +$ چوڑائی $)$

مستطیل کی چوڑائی $= \dfrac{22 - 2x}{2}$

$= (11 - x)$ سینٹی میٹر

مستطیل کا رقبہ $= x(11 - x)$

$$24 = 11x - x^2$$

$$x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$(x - 3)\ (x - 8) = 0$$

اس لیے $x = 3$ یا $x = 8$

جب $x = 3$ ہو تو چوڑائی $= 11 - 3$

$= 8$ سینٹی میٹر

جب $x = 8$ ہو تو چوڑائی $= 11 - 8$

$= 3$ سینٹی میٹر

چونکہ لمبائی مقدار میں بڑی ہوتی ہے

پس لمبائی = 8 سینٹی میٹر

چوڑائی = 3 سینٹی میٹر

مثال 3:- ایک آدمی کی موجودہ عمر اپنے بیٹے کی عمر کا پانچ گنا ہے۔ 4 سال پہلے دونوں کی عمروں کا حاصل ضرب 52 تھا۔ ان کی موجودہ عمریں معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا بیٹے کی موجودہ عمر = x سال

باپ کی موجودہ عمر = $5x$ سال

4 سال پہلے بیٹے کی عمر = $x - 4$ سال

4 سال پہلے باپ کی عمر = $5x - 4$ سال

شرط سوال کے مطابق $(x-4)\ (5x-4) = 52$

$$5x^2 - 24x + 16 = 52$$
$$5x^2 - 24x - 36 = 0$$
$$5x^2 - 30x + 6x - 36 = 0$$
$$5x(x-6) + 6(x-6) = 0$$
$$(5x+6)\ (x-6) = 0$$
$$5x+6 = 0 \quad \text{یا} \quad x-6 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{-6}{5} \quad , \quad \Rightarrow x = 6$$

چونکہ بیٹے کی عمر $-\frac{6}{5}$ سال نہیں ہو سکتی لہٰذا بیٹے کی موجودہ عمر 6 سال ہے۔

چونکہ بیٹے کی عمر = 6 سال

باپ کی عمر = 30 سال

مثال 4:- دو مسلسل مثبت عدد معلوم کریں جن کے مربعوں کا مجموعہ 113 ہو۔

حل: فرض کیا کہ x، $x+1$ مطلوبہ مسلسل مثبت اعداد ہیں

دی گئی شرط کے مطابق $x^2 + (x+1)^2 = 113$

$$x^2 + x^2 + 2x + 1 = 113$$
$$2x^2 + 2x - 112 = 0$$

← 2 پر تقسیم کرنے سے

$$x^2 + x - 56 = 0$$
$$(x+8)\ (x-7) = 0$$
$$x+8 = 0 \quad \text{یا} \quad x-7 = 0$$
$$x = -8 \quad \text{یا} \quad x = 7$$
$$x+1 = 7+1 = 8$$

∴ مطلوبہ اعداد 7 اور 8 ہیں

مشق 5.3

1. دو ایسے مسلسل مثبت طاق اعداد معلوم کیجیے جن کے مربعوں کا مجموعہ 74 ہے۔

2. دو ایسے مسلسل مثبت جفت اعداد معلوم کریں جن کے مربعوں کا مجموعہ 164 ہو۔

3. دو اعداد کا فرق 9 ہے اور ان کا حاصل ضرب 162 ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

4. مثلث کا قاعدہ اور ارتفاع بالترتیب $(x+3)$ سینٹی میٹر اور $(2x-5)$ سینٹی میٹر ہیں۔ اگر مثلث کا رقبہ 20 مربع سینٹی میٹر ہو تو x کی قیمت معلوم کریں۔

5. کسی مستطیل کا احاطہ اور رقبہ بالترتیب 22 سینٹی میٹر اور 30 مربع سینٹی میٹر ہیں۔ مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی معلوم کریں۔

6. دو مسلسل مثبت اعداد کا حاصل ضرب 156 ہے۔ اعداد معلوم کریں

7. دو ایسے مسلسل مثبت طاق اعداد معلوم کریں۔ جن کے ضربی معکوس کا فرق $\frac{2}{63}$ ہے۔

8. دو مثبت اعداد کا مجموعہ 12 اور ان کے مربعوں کا مجموعہ 80 ہے۔ اعداد معلوم کریں۔

جائزہ مشق-5

I- صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگایئے۔

1. دو درجی مساوات کا درجہ ہوتا ہے۔

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) 3

2. ایک متغیر میں خطی مساوات کا درجہ ہوتا ہے۔

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) 3

3. $2x^2 = 3x$ کی تجزی ہے۔

(a) 0 (b) $x(2x-3)$

(c) $2x^2 - 3x$ (d) $3x - 2x^2$

4. $(x-2)^2 = 4$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) $\{0, 4\}$ (b) $\{-6, 2\}$

(c) $\{-6 - 2\}$ (d) $\{2, 6\}$

5. دو درجی مساوات کو حل کرنے کے طریقے ہیں۔

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

6. $x^2 - 5x + 6 = 0$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) $\{3\}$ (b) $\{2\}$ (c) $\{2,3\}$ (d) $\{-2, -3\}$

7. $x^2 - 9 = 0$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) $\{9\}$ (b) $\{\pm 9\}$ (c) $\{\pm 3\}$ (d) $\{3\}$

8. $x^4 - 16$ کی تجزی ہے۔

(a) $(x-2)(x+2)$ (b) $(x-2)(x+2)(x-4)$

(c) $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ (d) $(x-2)^2$

9. $x^2 = 1$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) $\{1\}$ (b) $\{\pm 1\}$ (c) $\{\pm i\}$ (d) $\{-1\}$

10. $x^2 + 2x + 1 = 0$ کا حل سیٹ ہے۔

(a) $\{-1, -1\}$ (b) $\{-1\}$ (c) $\{0\}$ (d) کوئی حل نہیں ہے

II- خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

1. ایک متغیر والی مساوات جس کا درجہ '2' ہو ________ مساوات کہلاتی ہے۔

2. $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ________ کہلاتا ہے۔

3. $2x^2 - 3x$ کی تجزی ________ ہے۔

4. $(x-1)^2 = 4$ کا حل سیٹ ________ ہے۔

5. دو درجی مساوات حل کرنے کے طریقے ________ ہیں۔

6. اگر کسی دو درجی مساوات کو حل کرنے کے لیے تجزی کا طریقہ نہ استعمال ہو سکے تو اسے حل کرنے کے لیے ________ استعمال کرتے ہیں۔

7. $x^2 - 5x + 6 = 0$ کا حل سیٹ ________ ہے۔

8. $x^2 - 9 = 0$ کا حل سیٹ ________ ہے۔

9. $x^4 - 16$ کی تجزی ________ ہے۔

10. $x^2 = 1$ کا حل سیٹ ________ ہے۔

خلاصہ SUMMARY

دو درجی مساوات: ایک متغیر میں دو درجی مساوات ایک ایسی مساوات ہوتی ہے کہ جیسے $ax^2 + bx + c = 0$ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جبکہ $a \neq 0$ اس میں 'x' متغیر ہوتا ہے اور a, b, c حقیقی اعداد ہوتے ہیں۔

دو درجی مساوات کا حل: ہم دو درجی مساوات کو حل کر سکتے ہیں۔

(i) تجزی کے طریقہ سے

(ii) تکمیل مربع کے طریقہ سے

دو درجی کلیہ: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

یونٹ 6

قالب اور مقطع
MATRICES AND DETERMINANTS

- قالبوں کا تعارف
- قالبوں کی اقسام
- قالبوں کی جمع اور تفریق
- قالبوں کی ضرب
- قالب کا ضربی معکوس
- ہم زاد خطی مساوات کا حل

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- قالب کا تعارف کرواسکیں۔
  - حقیقی اعداد پر مشتمل مستطیلی شکل میں روزمرہ زندگی سے تعلق کے ساتھ
  - قالب کی قطاریں، کالم، مرتبہ اور قالبوں کی برابری
- قطاری، کالمی، مستطیلی اور مربعی قالبوں کا تعارف اور پہچان کر سکیں۔ صفری، ضربی ذاتی، سکیلر، وتری، ٹرانسپوز، متشاکل، اور ضد متشاکل قالب پہچان سکیں۔
- جان سکیں کہ دیے ہوئے قالب آپس میں جمع ہو سکتے ہیں یا نہیں۔
- قالب کو جمع اور تفریق کر سکیں۔
- قالب کو حقیقی عدد سے ضرب کر سکیں۔
- جمع کے لحاظ سے قوانین مبادلہ اور تلازم کی پڑتال کر سکیں۔
- جمعی ذاتی قالب متعارف کرواسکیں۔
- قالب کا جمعی معکوس معلوم کر سکیں۔
- جان سکیں کہ دیے ہوئے قالبوں کا کی ضرب ہو سکتی ہے یا نہیں۔
- دو یا تین قالبوں کو ضرب دے سکیں۔
- ضرب کے لحاظ سے قانون تلازم کی پڑتال کر سکیں۔
- قوانین تقسیمی پڑتال کر سکیں۔
- ثابت کر سکیں کہ عمودی طور پر ضرب کے لحاظ سے قانون مبادلہ پورا نہیں اترتا۔ $(AB \neq BA)$
- ضربی ذاتی قالب متعارف کرواسکیں۔
- $(AB)^t = B^t A^t$ کی تصدیق کر سکیں۔
- مربعی قالب کا مقطع متعارف کرواسکیں۔
- قالب کا مقطع حل کر سکیں۔
- نادر اور غیر نادر قالب کا تعارف کرواسکیں۔
- قالب کا ایڈ جائنٹ معلوم کر سکیں۔
- غیر نادر قالب A کا ضربی معکوس معلوم کر سکیں اور تصدیق کر سکیں کہ $AA^{-1} = I = A^{-1}A$ جہاں I ضربی ذاتی قالب ہے۔
- ایڈ جائنٹ کے طریقہ سے قالب کا ضربی معکوس معلوم کر سکیں۔
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ کی تصدیق کر سکیں۔
- خطی مساواتوں کے نظام کو حل کر سکیں۔
  - معکوس کے قالب کے طریقہ سے
  - کریمر کے طریقہ سے

6.1 تعارف INTRODUCTION

اس باب میں ہم نئی حسابی صورت متعارف کروائیں گے جسے ہم قالب کہتے ہیں۔ جس کی مدد سے ہم مختلف مقداروں کو ایک اکائی میں ظاہر کر سکیں گے۔

مشہور ریاضی دان آرتھر کیلے نے 1857ء میں قالب کا تصور متعارف کروایا۔ قالب طبیعات اور عمرانیات دونوں میں بہت وسیع حد تک استعمال کیے جاتے ہیں۔

قالب (مربعی یا مستطیلی شکل میں) اعداد کی قطاروں اور کالموں میں متعین ترتیب میں لکھی گئی شکل ہوتی ہے۔ جن کو بڑی یا چھوٹی بریکٹ میں لکھا جاتا ہے۔

عموماً قالبوں کو بڑے حروف تہجی ....A, B, C سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ جبکہ قالب

کے ارکان کو چھوٹے حروف تہجی ....a, b, c یا اعداد ....$1, 2, 3$ میں لکھا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad ، \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} \quad ، \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 5 \end{bmatrix} \quad ، \quad D = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

ایک اور مثال لیجیے:

ایک شرٹ بنانے والی کمپنی ایک معیار کا اور ایک مقابلے کا ماڈل تیار کرتی ہے۔ دونوں ماڈلوں کے لیے مزدوری (گھنٹوں میں) کو 3×2 درجے والے قالب سے با آسانی ظاہر کیا جاتا ہے۔

بنوائی، صفائی، پیکنگ اور ہینڈلنگ

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0.2 \\ 7 & 2 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{معیاری ماڈل} \\ \text{مقابلے کا ماڈل} \end{matrix}$$

ہفتہ وار پیداوار کو ایک قطاری قالب میں لکھا جاسکتا ہے۔

معیاری شرٹس   مقابلے کی شرٹس

$$\begin{bmatrix} 100 & 10 \end{bmatrix}$$

ہر قالب ارکان کی افقی اور عمودی ترتیب پر مشتمل ہوتا ہے۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ارکان کی افقی ترتیب

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

ارکان کی عمودی ترتیب

قطاریں: افقی ترتیب میں لکھے گئے ارکان قطاریں کہلاتی ہیں۔

کالم: ارکان کی عمودی ترتیب کالم کہلاتی ہے۔

قالبوں میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر بھی ہو سکتی ہے اور مختلف بھی۔ لیکن ہر دو قطاروں میں ارکان کی تعداد یا پھر دو کالموں میں عناصر کی تعداد یکساں ہوتی ہے۔

عموماً قطاروں کو R اور کالموں کو C سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

کالم 1 یا C_1 ↓   کالم 2 یا C_2 ↓

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

b ← قطار 1 یا R_1

d ← قطار 2 یا R_2

قالب A میں دو قطاریں اور دو کالم ہیں جبکہ $a,\ b,\ c,\ d$ اس کے ارکان کہلاتے ہیں۔ قطاروں کی تعداد کو m جبکہ کالموں کی تعداد کو n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

درج بالا مثال میں $m = 2$ اور $n = 2$

قالب کا مرتبہ Order of a Matrix:

اگر کسی قالب A میں قطاروں کی تعداد 'm' اور کالموں کی تعداد 'n' ہو تو قالب A کا مرتبہ $m \times n$ ہوتا ہے۔ جو کہ (m بائی n) پڑھا جاتا ہے۔

مثال 1:- $P = [\ 3\ ]$ کا مرتبہ لکھیے۔

حل: قالب P میں صرف ایک قطار اور ایک کالم ہے لہٰذا

P (1 بائی 1) یعنی 1×1 مرتبہ کا قالب ہے۔

مثال 2:- $Q = [\ 4 \quad 7\ ]$ کا مرتبہ معلوم کیجیے۔

حل: Q قالب میں قطاروں کی تعداد '1' اور کالموں کی تعداد '2' ہے۔

Q قالب کا مرتبہ 1×2 یعنی 1 بائی 2 ہے۔

مثال 3:- $R = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ معلوم کیجیے۔

حل: قالب میں قطاروں کی تعداد دو یعنی $m = 2$ ہے۔

اور کالموں کی تعداد دو یعنی $n = 2$ ہے۔

R کا مرتبہ 2×2 یعنی 2 بائی 2 ہے۔

مثال 4:- $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ کا مرتبہ لکھیے۔

حل: قالب میں قطاروں کی تعداد تین یعنی $m = 3$ کالموں کی تعداد تین یعنی $n = 3$

پس A کا مرتبہ 3×3 (تین بائی تین) ہے۔

یاد رکھیے کہ:

- کسی قالب A کے مرتبہ $m \times n$ کو m بائی n پڑھتے ہیں۔
- یہ بات اہمیت کی حامل ہے کہ اس قالب کے مرتبہ میں قطاروں کی تعداد پہلے یعنی بائیں جانب اور کالموں کی تعداد بعد میں دائیں جانب لکھی جاتی ہے۔

مساوی قالب: MatrixEquality

دو قالب مساوی ہوں گے اگر ان کا مرتبہ یکساں ہو اور ان کے متناظرہ ارکان یکساں ہوں۔
دو قالبوں A اور B کے مساوی ہونے کو یوں لکھتے ہیں $A = B$
مثال کے طور پر

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{2} & 2\times 2 \\ \frac{12}{2} & 4\times 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{4}{2} \\ 4 = 2\times 2 \\ 6 = \frac{12}{2} \\ 8 = 4\times 2 \end{cases}$$

مثال:- درج ذیل میں کون کون سے قالب مساوی اور کون سے غیر مساوی ہیں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3-2 & \frac{4}{2} \\ 3 & 2\times 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & \frac{6}{2} & 7 \\ \frac{6}{3} & 1 & 3 \\ 2\times 2 & 2 & \frac{10}{2} \end{bmatrix},$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل: قالب B کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$B = \begin{bmatrix} 3-2 & \frac{4}{2} \\ 3 & 2\times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A$$

(i) A اور B کا مرتبہ یکساں یعنی 2×2 ہے اور متناظرہ ارکان بھی ایک جیسے ہیں۔ لہٰذا $A = B$

(ii) A، B اور C کے مرتبے یکساں ہیں لیکن C کے متناظرہ ارکان ایک جیسے نہیں۔ لہٰذا $A = B \neq C$

(iii) قالب E کے ارکان کو اس طرح لکھا جا سکتا ہے کہ D اور E کے مرتبے یکساں ہیں یعنی 3×3 اور متناظرہ ارکان بھی مساوی ہیں۔ لہٰذا $D = E$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & \frac{6}{2} & 7 \\ \frac{6}{3} & 1 & 3 \\ 2\times 2 & 2 & \frac{10}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{bmatrix} = D$$

(iv) چونکہ F کا مرتبہ 2×2 ہے۔ لہٰذا
$E \neq F$ اور $F \neq D$

مشق 6.1

درج ذیل قالبوں کی مدد سے سوال نمبر **1** تا **3** کا جواب دیجیے۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

-1 قالبوں A، C اور F کے مرتبے کیا ہیں؟

-2 قالبوں B، D اور E کے مرتبے کیا ہیں؟

-3 قالب D کی دوسری قطار اور تیسرے کالم کا رکن کیا ہے؟

-4 درج ذیل قالبوں میں سے کون سے برابر ہیں اور کون سے برابر نہیں؟

$$A = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2+2 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 3+3 \\ 8+1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} \frac{5}{5} & \frac{4}{2} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}, I = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 16/2 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3+2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 4+2 & 3 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

6.2 قالبوں کی اقسام TYPES OF MATRICES

(I) قطاری قالب Row Matrix

ایسا قالب جس میں صرف ایک ہی قطار ہو، قطاری قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $A = [1 \quad 2]$ ‏ 1×2 مرتبہ کا قالب ہے۔

$B = [2 \quad 3 \quad 4]$ ‏ 1×3 مرتبہ کا قالب ہے۔

(II) کالمی قالب Column Matrix

ایسا قالب جس میں صرف ایک ہی کالم ہو، کالمی قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ‏ 2×1 مرتبہ کا قالب ہے۔

$D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ ‏ 3×1 مرتبہ کا قالب ہے۔

(III) مستطیلی قالب Rectangular Matrix

ایسا قالب جس میں قطاروں کی تعداد کالموں کی تعداد کے برابر نہ ہو، مستطیلی قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $A = [2 \quad 5]$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

A، B اور C بالترتیب 1×2، 2×1 اور 2×3 مرتبہ کے قالب ہیں۔

(IV) مربعی قالب Square Matrix

اگر کسی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو، مربعی قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

QP بالترتیب: 2×2 اور 3×3 مرتبہ کے قالب ہیں۔

(V) صفری قالب Zero or Null Matrix

اگر کسی قالب میں تمام ارکان صفر ہوں تو اسے صفری قالب کہتے ہیں۔ صفری قالب کو O سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$O = [0]$ 1×1 کے مرتبہ کا قالب ہے

$O = [0 \quad 0]$ 1×2 مرتبہ کا قالب ہے

$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2×2 مرتبہ کا قالب ہے

$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3×3 مرتبہ کا قالب ہے

(VI) وتری قالب Diagonal Matrix

ایسا مربعی قالب جس میں وتر کے کم از کم ایک رکن کے علاوہ باقی سب کے سب ارکان صفر ہوں وتری قالب کہلاتا ہے۔
وتر کے کچھ ارکان صفر ہو سکتے ہیں مگر سارے نہیں۔

مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

تمام کے تمام وتری قالب ہیں۔

(VII) سکیلر قالب Scalar Matrix

ایسا وتری قالب جس میں وتر کے تمام ارکان آپس میں برابر ہوں سکیلر قالب کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

سکیلر قالب کہلاتے ہیں

(VIII) وحدانی قالب یا ضربی ذاتی قالب Unit Matrix or Identity Matrix

ایسا سکیلر قالب جس کے وتر میں ہر رکن '1' ہو۔ ضربی ذاتی قالب کہلاتا ہے۔ جس کو I سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر: $I = [1]$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

مختلف مرتبوں کے ضربی ذاتی قالب ہیں۔

(IX) قالب کا ٹرانسپوز Transpose of a Matrix

قالب A جس کا مرتبہ $m \times n$ ہو، کی قطاروں کو کالموں میں تبدیل کر کے $n \times m$ مرتبہ کا حاصل ہونے والا نیا قالب A^t ، A کا ٹرانسپوز کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{تو} \quad A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{تو} \quad B^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

اگر A^t ، B^t بالترتیب A اور B کے ٹرانسپوز اور K کوئی سکیلر ہو تو

(a) $(A^t)^t = A$

(b) $(kA)^t = kA^t$

(c) $(A+B)^t = A^t + B^t$

(d) $(AB)^t = B^t A^t$

(X) متشاکل قالب Symmetric Matrix

کوئی مربعی قالب A متشاکل قالب ہوتا ہے اگر $A^t = A$

مثال کے طور پر:

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix} \quad \text{اور} \quad A^t = \begin{bmatrix} p & q \\ q & r \end{bmatrix}$$

چونکہ $A^t = A$ ، قالب A ایک متشاکل قالب ہے۔

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B^t = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

چونکہ $B^t = B$ قالب B ایک متشاکل قالب ہے۔

(XI) غیر متشاکل قالب Skew-Symmetric Matrix

مربعی قالب A، غیر متشاکل ہوتا ہے اگر $A' = -A$

مثال کے طور پر:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

چونکہ $A' = -A$

پس A ایک غیر متشاکل قالب ہے۔

مشق 6.2

-1 مندرجہ ذیل میں سے قطاری قالب، کالمی قالب، مربعی قالب اور مستطیلی قالب کا تعین کیجیے۔

$$A = [3 \quad 1 \quad 1 \quad 1],\ B = \begin{bmatrix} 5+2 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} a+x \\ b+y \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} x & -2 \\ b & 5 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix},\ H = [0]$$

-2 وتری قالب، سکیلر قالب، ضربی ذاتی قالب کا تعین کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

-3 درج ذیل قالبوں کے ٹرانسپوز معلوم کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} a & -b \\ c & d \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} l & m & n \\ p & q & r \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

-4 قطاری قالبوں کی شناخت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} e & f & g \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 9 & 8 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 3 \end{bmatrix},$$

-5 کالمی قالبوں کی شناخت کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ -4 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

-6 کالمی قالبوں کی پہچان کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \\ 7 & 3 & 4 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 9 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 6 & 5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

-7 3×3 مرتبہ کی مربعی قالبوں کی پہچان کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

6.3 قالبوں کی جمع اور تفریق ADDITION AND SUBTRACTION OF MATRICES

دو قالب A اور B آپس میں جمع ہو سکتے ہیں اگر وہ ہم مرتبہ ہوں اور یہ مجموعہ $(A + B)$ کے مطابقت کے ارکان کو جمع کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

$A + B$ کا مرتبہ A اور B کے مرتبہ کے برابر ہوگا۔

6.3.2 قالبوں کو جمع اور تفریق کرنا Add and Subtract Matrices

قالبوں کی جمع Addition of Matrices

جب دو قالب جمع کے موافق ہوں تو ان کے مطابقت کے ارکان کو جمع کر کے ان قالبوں کا مجموعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

(i) $$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w+a & x+b \\ y+c & z+d \end{bmatrix}$$

(ii) $$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -2 & -5 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+3 & 2+(-2) & 4+(-5) \\ 2+(-5) & -3+2 & 5+1 \\ 3+(-1) & 4+(-3) & 7+(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

قالبوں کی تفریق Subtraction of Matrices

اگر دو قالبوں کا مرتبہ یکساں ہو تو ان کا فرق $A-B$ لکھا جاتا ہے۔

$A-B$، قالب B کے متناظرہ ارکان کے ارکان کو قالب A کے مطابقت کے ارکان میں سے تفریق کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال 1:- اگر $B = \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو $A - B$ معلوم کریں۔

حل:

$$A-B = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 2 \\ 3 & b \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 1-a & x-2 \\ y-3 & 4-b \end{bmatrix}$$

مثال 2:- اگر $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ ہو تو $A - B$ معلوم کریں۔

حل:

$$A-B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-1 & 7-3 & 3-5 \\ -1-2 & 3-1 & 4-6 \\ 0-(-1) & 4-8 & -2-3 \end{bmatrix}$$

$$A-B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$$

مثال 3:- قالبوں A، B اور C کو جمع کریں جب کہ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

حل: چونکہ قالب A، B اور C ہم مرتبہ ہیں لہٰذا یہ جمع کے لیے موافق ہیں۔

$$A+B+C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+1+2 & 1+3-6 \\ 3-2-4 & 4+5+1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$$

مثال 4:-

قالب B کو قالب A سے تفریق کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 11 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

حل: چونکہ A اور B ہم مرتبہ ہیں لہٰذا تفریق کے موافق ہیں۔

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 11 & -5 & 2 \\ 2 & 4 & -6 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2-11 & 4+5 & 7-2 \\ 1-2 & 3-4 & -2+6 \\ 4-3 & 5-6 & 6+1 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} -9 & 9 & 5 \\ -1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

6.3.3 سکیلر سے ضرب A Scalar Multiplication

حقیقی اعداد کے سیٹ کا ہر رکن ایک سکیلر کہلاتا ہے۔ ہم کسی قالب A کی کسی سکیلر k سے ضرب کو kA سے ظاہر کرتے ہیں۔ یہ ایسا قالب ہوتا ہے جو قالب A کے تمام ارکان کو k سے ضرب دے کر بنایا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر:

(i) اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، ہو تو $kA = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$

(ii) اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$ ، ہو تو $3A = \begin{bmatrix} 12 & 9 & 6 \\ 6 & 18 & -3 \\ -9 & 12 & 21 \end{bmatrix}$

6.3.4 قالبوں کی جمع کے قوانین Laws of Addition of Matrices

قانون مبادلہ Commutative Law

کوئی سے دو ہم مرتبہ قالبوں A اور B کے لیے

$$A + B = B + A$$

یہ قانون مبادلہ بلحاظ جمع کہلاتا ہے۔

مثال 1:-

اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو $A + B = B + A$ ثابت کیجیے۔

حل: قالب A اور B ہم مرتبہ ہیں۔ اس لیے یہ جمع کے لیے موافق ہیں۔

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 3+2 \\ 4-6 & 5+1 \end{bmatrix}$$

$$A+B = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

اور

$$B+A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+1 & 2+3 \\ -6+4 & 1+5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

پس $A + B = B + A$

قانون تلازم Associative Law

تین ہم مرتبہ قالبوں A, B اور C کے لیے۔

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

یہ قانون ''قانون تلازم بلحاظ جمع'' کہلاتا ہے۔

مثال:- اگر $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ہوتو

قانون تلازم بلحاظ جمع کی تصدیق کیجیے۔

حل:

$$(A+B)+C = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \text{..............} (i)$$

$$A+(B+C) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \text{..............} (ii)$$

(i) اور (ii) سے ثابت ہوا کہ $(A + B) + C = A + (B + C)$

6.3.5 قالبوں کے جمعی ذاتی قالب Additive Identity of Matrices

حقیقی اعداد کے سیٹ میں صفر "0" جمعی ذاتی عدد ہوتا ہے۔ یعنی حقیقی عدد اور صفر کا حاصل جمع وہی عدد ہوتا ہے۔
مثلاً $5 = 5 + 0 = 0 + 5$ اسی طرح صفری قالب O جس کا مرتبہ $(m \times n)$ ہے۔ جمعی ذاتی قالب کہلاتا ہے یعنی

$$A + O = O + A = A$$

مثلاً

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

اب

$$A+O = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A+O = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A$$

اور

$$O+A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = A$$

پس $A + O = O + A = A$ لہٰذا 'O' جمعی ذاتی قالب ہے۔

6.3.6 قالب کا جمعی معکوس Additive Inverse of a Matrix

اگر قالب A اور B اس طرح ہوں کہ ان کا مجموعہ $(A + B)$ ایک صفری قالب 'O' ہو تو دونوں A اور B ایک دوسرے کا جمعی معکوس کہلاتے ہیں۔

مثال کے طور پر:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ اور } B = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

اب

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O$$

A اور B ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں۔

مثال:-

اگر
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} \text{ اور } B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

ہو تو

$$A + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \\ -2 & -1 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -5 \\ 2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+1 & 2-2 & -3+3 \\ 2-2 & -4+4 & 5-5 \\ -2+2 & -1+1 & 7-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A + B = O$$

A اور B ایک دوسرے کے جمعی معکوس ہیں۔

مشق 6.3

-1 اگر $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 5 \\ 4 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

(i) $A + B$ (ii) $A - B$ (iii) $B - A$

(iv) $2A + 3B$ (v) $3A - 4B$ (vi) $A - 2B$

-2 درج ذیل قالبوں کے جمعی معکوس معلوم کیجیے۔

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 4 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$، $C = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$، $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$،
$E = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

-3 اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

(i) $4A - 3A = A$ (ii) $3B - 3A = 3(B - A)$

-4 x اور y معلوم کیجیے اگر $\begin{bmatrix} x+3 & 1 \\ -3 & 3y-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

-5 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ

(i) $A + B = B + A$ (ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$

-6 اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو X معلوم کیجیے جبکہ $3X - 2A = B$

-7 $a، b، c، d، e$ اور f معلوم کیجیے۔

جبکہ $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

-8 $w، x، y، z$ معلوم کیجیے جبکہ

$$\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}.$$

-9 اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ تو A کا جمعی معکوس معلوم کریں۔

-10 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ہوتو ثابت کیجیے کہ $A^2 - 4A + 5I = 0$

-11 اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ ہوتو ثابت کیجیے کہ $(A+B)^t = A^t + B^t$

-12 اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

ہوتو ثابت کیجیے کہ $A + B - C = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

6.4.1 قالبوں کی ضرب MULTIPLICATION OF MATRICES

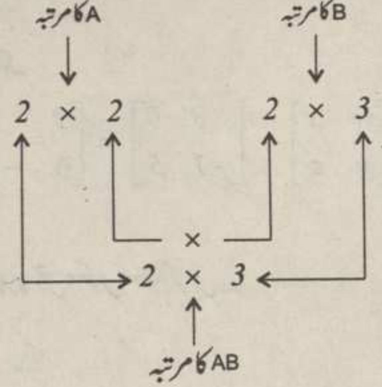
دو قالب A اور B ضرب AB کے لیے موزوں ہوتے ہیں اگر A میں کالموں کی تعداد B میں قطاروں کی تعداد کے برابر ہو۔

مثال کے طور پر:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 4 + 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \end{bmatrix}$$

مثال 1:-

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$



حاصل ضرب AB کے ارکان اس طرح ہوں گے کہ:

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$ جبکہ

$c_{11} = a_{11}\ b_{11} + a_{12}\ b_{21}$ — A کی پہلی قطار کے ارا کین اور B کے پہلے کالم کے ارا کین کی ضرب

$c_{12} = a_{11}\ b_{12} + a_{12}\ b_{22}$ — A کی پہلی قطار کے ارا کین اور B کے دوسرے کالم کے ارا کین کا حاصل ضرب

$c_{13} = a_{11}\ b_{13} + a_{12}\ b_{23}$ — A کی پہلی قطار کے ارا کین اور B کے تیسرے کالم کے ارا کین کا حاصل ضرب

$c_{21} = a_{21}\ b_{11} + a_{22}\ b_{21}$

$c_{22} = a_{21}\ b_{12} + a_{22}\ b_{22}$

$c_{23} = a_{21}\ b_{13} + a_{22}\ b_{23}$, لہٰذا

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} & a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} & a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} \end{bmatrix}$$

مثال 2:-

اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ہوتو AB معلوم کیجیے۔

حل:

A کا مرتبہ $= 2 \times 2$

B کا مرتبہ $= 2 \times 1$

کیوں کہ A میں کالموں کی تعداد $=$ B میں قطاروں کی تعداد $= 2$ کا مرتبہ $AB = 2 \times 1$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\times2 + 2\times3 \\ 3\times2 + 4\times3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + 6 \\ 6 + 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 18 \end{bmatrix}$$

نتیجہ:

اگر A مربعی قالب ہوتو $A^2 = A.A$

$A^3 = A.A.A = AA^2 = A^2A$

$A^n = A.A.A \ldots\ldots\ldots\ldots n$ بار n

یاد رکھیے کہ:

قالبوں A اور B کی ضرب AB کے لیے درج ذیل نکات کو ملحوظ خاطر رکھیے۔

(i) A میں کالموں کی تعداد $=$ B میں قطاروں کی تعداد

(ii) A اور B کا حاصل ضرب $A \times B$ یا AB سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(iii) اگر قالب A کا مرتبہ $(m \times p)$ اور قالب B کا مرتبہ $(p \times n)$ ہوتو AB کا مرتبہ $(m \times n)$ ہوگا۔

6.4.3 قانون تلازم بلحاظ ضرب
Associative Law of Matrices with respect to Multiplication

اگر تین قالب A ، B اور C ضرب کے لیے موزوں ہوں تو

$$A(BC) = (AB)C$$

یہ قانون تلازم بلحاظ ضرب کہلاتا ہے۔

مثال:-

اگر $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

ہوتو بلحاظ ضرب قانون تلازم کی تصدیق کیجیے۔

حل:

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\times4 + 1\times3 & 1\times2 + 1\times1 \\ 2\times4 + 3\times3 & 2\times2 + 3\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4+3 & 2+1 \\ 8+9 & 4+3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 17 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times7 + 1\times17 & 2\times3 + 1\times7 \\ 3\times7 + 1\times17 & 3\times3 + 1\times7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14+17 & 6+7 \\ 21+17 & 9+7 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 31 & 13 \\ 38 & 16 \end{bmatrix} \quad ....(i)$$

اور

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times1 + 1\times2 & 2\times1 + 1\times3 \\ 3\times1 + 1\times2 & 3\times1 + 1\times3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 2+2 & 2+3 \\ 3+2 & 3+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4\times 4 + 5\times 3 & 4\times 2 + 5\times 1 \\ 5\times 4 + 6\times 3 & 5\times 2 + 6\times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16+15 & 8+5 \\ 20+18 & 10+6 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 31 & 13 \\ 38 & 16 \end{bmatrix} \text{...........}(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے $A(BC) = (AB)C$

قالبوں میں قانون تلازم بلحاظ ضرب درست ہے۔

6.4.4 ضرب کے قوانین تقسیمی Distributive Laws

اگر قالب A، B اور C جمع اور ضرب کے لیے موزوں ہوں

(i) $A(B + C) = AB + AC$ (بائیں طرف سے قالبوں کی ضرب کا قانون تقسیمی)

(ii) $(A + B)C = AC + BC$ (دائیں طرف سے قالبوں کی ضرب کا قانون تقسیمی)

(i) اور (ii) قوانین تقسیمی کہلاتے ہیں۔

مثال:-

اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ اور $C = \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

ہو تو بائیں طرف سے دائیں طرف قوانین تقسیمی کی تصدیق کیجیے۔

حل: (i) بائیں طرف سے قانون تقسیمی $A(B + C) = AB + AC$

$$B + C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B+C=\begin{bmatrix}2-1 & 3-4\\-1+3 & -2+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 4\end{bmatrix}$$

اب

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4+6 & -4+12\\2+4 & -2+8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 8\\6 & 6\end{bmatrix}\text{..........}(i)$$

اور

$$AB+AC=\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -4\\3 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8-3 & 12-6\\4-2 & 6-4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4+9 & -16+18\\-2+6 & -8+12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 6\\2 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 2\\4 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10 & 8\\6 & 6\end{bmatrix}\text{..........}(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$A(B+C) = AB + AC.$

(ii) دائیں طرف سے قانون تقسیمی $(A + B)\,C = AC + BC$

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

لہٰذا

$$(A+B)\,C = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6+18 & -24+36 \\ -1+0 & -4+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \text{..........}(i)$$

اور

$$AC+BC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4+9 & -16+18 \\ -2+6 & -8+12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2+9 & -8+18 \\ 1-6 & 4-12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ -5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 12 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \text{..........}(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$(A + B)\,C = AC + BC.$$

6.4.5 قانون مبادلہ بلحاظ ضرب Commutative Law

عموماً قالبوں کی ضرب میں قانون مبادلہ لاگو نہیں ہوتا۔ یعنی $AB \neq BA$

مثال 1:- اگر $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ اور $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ہو تو پڑتال کریں کہ $AB \neq BA$

حل: فرض کریں کہ قالب A اور B ضرب AB اور BA کے موزوں ہیں۔

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+8 & 3+4 \\ -3-8 & 9-4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ -11 & 5 \end{bmatrix} \text{...........}(i)$$

$$BA = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1+9 & -2-6 \\ 4+6 & 8-4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & -8 \\ 10 & 4 \end{bmatrix} \text{...........}(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$AB \neq BA$$

پس عموماً قانون مبادلہ قالبوں کی ضرب میں درست نہیں ہے۔

مثال 2:-

اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $I_2A = AI_2 = A$

حل:

$$I_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times a + 0\times c & 1\times b + 0\times d \\ 0\times a + 1\times c & 0\times b + 1\times d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$I_2A = A \quad ....(i)$$

$$AI_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\times 1 + b\times 0 & a\times 0 + b\times 1 \\ c\times 1 + d\times 0 & c\times 0 + d\times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$AI_2 = A \quad ....(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$I_2A = AI_2 = A$$

6.4.7 مسئلہ Theorem

$(AB)^t = B^t A^t$ جبکہ A اور B دو قالب ہیں۔

مثال:-

اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ اور $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کریں کہ $(AB)^t = B^t A^t$

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+6 & 6+3 \\ -1-4 & 3-2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L.H.S = (AB)^t = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \text{...........}(i)$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, \quad B^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R.H.S = B^t A^t = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2+6 & -1-4 \\ 6+3 & 3-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} \text{...........}(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) سے

$$(AB)^t = B^t A^t$$

مشق 6.4

سوالات 1 تا 8 میں دیے ہوئے بیانات کی تصدیق کیجیے جبکہ:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\text{ ، } B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}\text{ ، } C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

1. $(AB)C = A(BC)$
2. $AB \neq BA$
3. $A(B+C) = AB + AC$
4. $(B+C)A = BA + CA$
5. $(B+C)(B-C) \neq B^2 - C^2$
6. $(BC)^t = C^t B^t$
7. $BI = B$
8. $BC \neq CB$

قالبوں کے حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

9. $\begin{bmatrix}2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix}3 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & -2\end{bmatrix}$
12. $\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 4 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5\\ -1 & 3\end{bmatrix}$
13. $\begin{bmatrix}-5 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 0 & -3\end{bmatrix}$
14. $\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 0 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & -5\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -0\end{bmatrix}$

15. اگر $\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & a\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b\\ 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}35\\ 10\end{bmatrix}$ ہوتو a اور b کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

16. اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ ہوتو ثابت کیجیے کہ $(AB)^t = B^t A^t$

MULTIPLICATIVE INVERSE OF A MATRIX قالب کا ضربی معکوس 6.5

6.5.1 تفاعل کا مقطع Determinant Function

اس حصہ میں ہم ایک نئے تفاعل کا تعارف کروا رہے ہیں۔ جو کہ کسی مربعی قالب کا مقطع کہلاتا ہے۔ اس کی ڈومین میں حقیقی اعداد والے ارکان کے قالب ہوتے ہیں اور رینج تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہوتی ہے۔

اگر A کوئی مربعی قالب ہو تو قالب A کا مقطع $|A|$ یا $det\ A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو کہ ایک منفرد حقیقی عدد ہوتا ہے۔

2×2 مرتبہ والے قالب کے مقطع کو درج ذیل طریقہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$
$$- ad = bc$$

6.5.2 قالب A کے مقطع کی قیمت معلوم کرنا Evaluate Determinant of a Matrix

مثال 1:- اگر $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$، $det\ A$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:
$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = (-1)\times(-4) - (-3)\times 2$$
$$= 4+6 = 10$$

مثال 2:- اگر $A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$، $det\ A$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:
$$det\ A = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 12-8 = 4$$

مثال 3:- اگر $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{bmatrix}$، $det\ A$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل:
$$det\ A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 10 & 4 \end{vmatrix} = 20-20 = 0$$

6.5.3 نادر اور غیر نادر قالب Singular and Non-Singular Matrices

نادر قالب Singular Matrix

ایک مربعی قالب A نادر قالب کہلاتا ہے اگر $det\ A = 0$

مثال:- اگر $A = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$

$$det\ A = \begin{vmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 36 - 36$$

$$det\ A = 0$$

پس A ایک نادر قالب ہے۔

غیر نادر قالب Non-Singular Matrix

ایک مربعی قالب A غیر نادر قالب کہلاتا ہے اگر $det\ A \neq 0$

مثال:- اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

$$det\ A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16 - 30$$

$$det\ A = -14 \neq 0$$

پس A ایک غیر نادر قالب ہے۔

6.5.4 قالب کا ایڈ جائنٹ Adjoint of a Matrix

فرض کیا $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ایک 2×2 کا مربعی قالب ہے۔ اگر اس قالب کے وتری ارکان a اور d کی جگہ آپس میں بدل دی جائے اور باقی ارکان b اور c کی علامتیں تبدیل کر دی جائیں تو اس طرح حاصل ہونے والا قالب A کا ایڈ جائنٹ کہلاتا ہے۔

قالب A کا ایڈ جائنٹ $adj\ A$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثلاً اگر $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ہو تو $adj\ A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

ایک دوسری مثال لیجیے۔

اگر $P = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو $adj\ P = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -6 \end{bmatrix}$

6.5.5 ضربی معکوس Multiplicative Inverse

ہم جانتے ہیں کہ حقیقی اعداد کے سیٹ میں ہر غیر صفری حقیقی عدد 'a' کے ذریعے ایک دوسرا حقیقی عدد a^{-1} ایسا موجود ہوتا ہے کہ $a\,a^{-1} = 1$ تو عدد a^{-1} پہلے عدد a کا ضربی معکوس کہلاتا ہے۔

اسی طرح ہر مربعی قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} ہوتا ہے۔ اس طرح کہ $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ جبکہ $det\ A \neq 0$

کسی غیر نادر قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} یوں معلوم کیا جاتا ہے

$$\boxed{A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}}\quad , |A| \neq 0$$

اگر A ایک نادر قالب ہو تو اس کا ضربی معکوس نہیں ہوتا۔

یاد رکھیے کہ:

(i) مربعی قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(ii) صرف غیر نادر قالب کا ضربی معکوس ہوتا ہے۔

(iii) کسی مربعی قالب A کا ضربی معکوس منفرد ہوتا ہے۔

(iv) غیر مربعی قالبوں کے ضربی معکوس نہیں معلوم کیے جا سکتے۔

(v) $A^{-1} = \dfrac{adj\ A}{|A|}$

مثال:- اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ہوتو $A A^{-1} = A^{-1}A = I$ کی تصدیق کیجیے۔
جبکہ I ضربی ذاتی قالب ہے۔

حل:
$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad adj\ A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 16 - 10$$
$$|A| = 6 \neq 0$$

ہم جانتے ہیں کہ $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

اب $A A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 16-10 & -8+8 \\ 20-20 & -10+16 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A A^{-1} = I \quad ....(i)$$

اور $A^{-1} A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$$A^{-1} A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 16-10 & 8-8 \\ -20+20 & -10+16 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} A = I \quad ....(ii)$$

مساوات (i) اور (ii) کی رو سے $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

6.5.6 غیر نادر قالب کا ضربی معکوس Inverse of a Non-Singular Matrix

کسی غیر نادر قالب $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ کا ضربی معکوس $\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ ہوتا ہے جبکہ $ad-bc \neq 0$

مثال 1:- اگر $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 9 \end{bmatrix}$ ہو تو قالب کا ضربی معکوس معلوم کیجیے۔

حل:

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 9 \end{bmatrix}, \quad \Rightarrow \quad adj\ A = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -14 & 7 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 14 & 9 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 63 - 42 = 21 \neq 0$$

ہم جانتے ہیں کہ $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ adj\ A$

$$= \frac{1}{21}\begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -14 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{9}{21} & \frac{-3}{21} \\ \frac{-14}{21} & \frac{7}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

مثال 2:- اگر $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ ہو تو B^{-1} معلوم کیجیے۔

حل:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} ، \ adj\ B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|B| = -6-12 = -18 \neq 0$$

ہم جانتے ہیں کہ $B^{-1} = \frac{1}{|B|}\, adj\, B$

$$= \frac{1}{-18}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2}{-18} & \frac{4}{-18} \\ \frac{3}{-18} & \frac{3}{-18} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-1}{6} & \frac{-1}{6} \end{bmatrix}$$

مثال 3:۔ اگر $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ ہو اور ممکن ہو تو P^{-1} معلوم کیجیے۔

حل: $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$, $adj\, P = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$

$$|P| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\times4 - 2\times6 = 12-12 = 0$$

چونکہ $|P| = 0$

P کا معکوس معلوم نہیں کیا جا سکتا کیوں کہ $\frac{1}{0}$ معروف نہیں ہے۔

6.5.7 ثابت کرنا کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ Verify $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

اسے ہم درج ذیل مثال سے ثابت کرتے ہیں۔

مثال:-

اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

حل:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 12+30 & 6+24 \\ 8+5 & 4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 30 \\ 13 & 8 \end{bmatrix}$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} 42 & 30 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = 42\times 8 - 13\times 30$$

$$= 336 - 390$$

$$= -54 \neq 0$$

اب $L.H.S = (AB)^{-1} = \dfrac{1}{|AB|}adj(AB)$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{-54}\begin{bmatrix} 8 & -30 \\ -13 & 42 \end{bmatrix} \quad ....(i)$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad adj\ A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3-12$$

$$= -9 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-9}\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \quad adj\ B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 16-10 = 6$$

اب $B^{-1} = \frac{adj\ B}{|B|}$

$$B^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

اب $B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{-9}\right)\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

$$= -\frac{1}{54}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{54}\begin{bmatrix} 4+4 & -24-6 \\ -5-8 & 30+12 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{-1}{54}\begin{bmatrix} 8 & -30 \\ -13 & 42 \end{bmatrix} \quad ....(ii)$$

(i) اور (ii) کی رو سے

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

مشق 6.5

-1 درج ذیل قالبوں کے مقطع معلوم کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} u & v \\ x & y \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} \frac{1}{1} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

-2 نادر اور غیر نادر قالبوں کو الگ الگ کیجیے۔

(i) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -a & b \\ a & b \end{bmatrix}$

-3 ہر ایک قالب A کا ضربی معکوس A^{-1} معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ $A^{-1}A = I$ اگر ضربی معکوس معلوم نہ کیا جا سکے تو وجہ بیان کریں۔

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

(vii) $\begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

-4 اگر $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ہو تو

(a) M^{-1} معلوم کیجیے۔

(b) ثابت کیجیے کہ $M^{-1}M = MM^{-1}$

-5 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ ہو تو ثابت کیجیے کہ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

6.6 ہمزاد خطی مساواتوں کا حل SOLUTION OF SIMULTANEOUS LINEAR EQUATIONS

دو متغیرات کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ہمیں دو مساواتوں کی ضرورت ہوتی ہے۔ مساواتوں کا ایسا جوڑا ہمزاد خطی مساواتوں کا نظام کہلاتا ہے۔

1- ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے کے طریقے
(a) معکوس قالب کا طریقہ (b) کریمر کا قانون
2- ان طریقوں کی مدد سے ہم حقیقی مسائل کا حل سیکھیں گے۔

6.6.1 معکوس قالب کا طریقہ Matrix Inversion Method

فرض کیا کہ $a_1x + a_2y = b_1$ ....(i)

اور $a_3x + a_4y = b_2$ ....(ii)

دو یک درجی ہمزاد مساواتیں ہیں۔ یہ مساواتیں قالبوں کی شکل میں یوں لکھی جا سکتی ہیں۔

$$\begin{bmatrix} a_1x + a_2y \\ a_3x + a_4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

یا
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

یا
$$AX = B \quad ....(iii)$$

جبکہ
$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

x اور y کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے ہم مساوات (iii) درج ذیل طریقہ سے حل کرتے ہیں۔

$$AX = B$$

اگر A کا ضربی معکوس A^{-1} ہو تو

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \qquad (\because A^{-1}A = I) \text{ جبکہ}$$

$$IX = A^{-1}B \qquad (\because IX = X)$$

$$X = \frac{adj\ A}{|A|}B \qquad |A| \neq 0 \text{ جبکہ}$$

اگر A نادر قالب یعنی $(|A| = 0)$ ہو تو دی ہوئی مساوات کا حل نکالنا ممکن نہیں۔

مثال:- درج ذیل مساواتوں کے سیٹ کو معکوس قالب کے طریقہ سے حل کریں۔

$$3x - 4y = 7, \quad 5x - 7y = 12$$

حل: دی گئی ہمزاد مساواتوں کو یوں قالب کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

یہاں پر $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -7 \end{vmatrix} = -21 + 20 = -1$$

$$|A| = -1 \neq 0$$

A ایک غیر نادر قالب ہے۔لہٰذا مساواتیں حل کی جاسکتی ہیں۔

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \, adj\, A = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -7 & 4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$$

چونکہ $X = A^{-1}B$

$$X = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 49 - 48 \\ 35 - 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

لہٰذا $x = 1$ اور $y = -1$

حل سیٹ $= \{(1, -1)\}$

کریمر کا قانون Cramer's Rule

یک درجی ہمزاد مساواتیں کریمر کے قانون سے حل کی جاسکتی ہیں۔ کریمر کے طریقہ سے یک درجی ہمزاد مساواتوں کے حل کرنے کی وضاحت نیچے دی جاتی ہے۔ درج ذیل دو مساواتوں پر غور کریں۔

$$a_1x + a_2y = b_1$$
$$a_3x + a_4y = b_2$$

قالبی شکل میں

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix}, \quad |A| \neq 0$$ جبکہ

$$|D_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_2 \\ b_2 & a_4 \end{vmatrix}$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_2 \end{vmatrix}$$

اب $x = \frac{|D_1|}{|A|}$ اور $y = \frac{|D_2|}{|A|}$

مثال 1:- کریمر کے طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل یک درجی ہمزاد مساواتوں کو حل کریں۔

$x + 3y = 6 \quad , \quad 2x + y = 4$

حل: $x + 3y = 6 \ , \ 2x + y = 4$

قالبی شکل میں

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-6 = -5 \neq 0$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6-12 = -6$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-12 = -8$$

$\therefore\ x = \dfrac{|D_1|}{|A|} = \dfrac{-6}{-5}$ اور $y = \dfrac{|D_2|}{|A|} = \dfrac{-8}{-5}$

$x = \dfrac{6}{5}$, $y = \dfrac{8}{5}$ $\therefore$ حل سیٹ $= \left\{(\dfrac{6}{5}, \dfrac{8}{5})\right\}$

مثال 2:- 7 سیب اور 4 ناشپاتیوں کی قیمت 11 روپے جبکہ 5 سیب اور 2 ناشپاتیوں کی قیمت 7 روپے ہے۔ ہر ایک سیب اور ایک ناشپاتی کی قیمت کیا ہے؟

حل: ہم ہر سیب کی قیمت کو 'x' اور ناشپاتی کی قیمت کو 'y' سے ظاہر کرتے ہیں تو

$$7x + 4y = 11$$
$$5x + 2y = 7$$

قالبی شکل میں

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 14-20 = -6 \neq 0$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 11 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 22-28 = -6$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 49-55 = -6$$

$x = \dfrac{|D_1|}{|A|} = \dfrac{-6}{-6} = 1,$ ایک سیب کی قیمت 1 روپیہ

$y = \dfrac{|D_2|}{|A|} = \dfrac{-6}{-6} = 1,$ ایک ناشپاتی کی قیمت 1 روپیہ

مثال 3:- دو اعداد معلوم کیجیے جن کا مجموعہ 67 اور فرق 3 ہے۔

حل: فرض کیا کہ x اور y دو نمبر اس طرح ہیں کہ $x > y$ تو سوال کی دونوں شرائط کے مطابق

$x + y = 67$ _______ (i)

$x - y = 3$ _______ (ii)

قالبوں کی شکل میں

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$$

$$|D_1| = \begin{vmatrix} 67 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -67-3 = -70$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 1 & 67 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3-67 = -64$$

$$x = \frac{|D_1|}{|A|} = \frac{-70}{-2} = 35$$

$$y = \frac{|D_2|}{|A|} = \frac{-64}{-2} = 32$$

$$x = 35 \qquad y = 32$$

$\therefore$ پس مطلوبہ اعداد 32 اور 35 ہیں۔

مثال 4:- ایک بیلٹ اور پرس کی مجموعی قیمت 42 روپے ہے۔ جبکہ 7 عدد بیلٹوں اور 4 عدد پرسوں کی کل قیمت 213 روپے ہے۔ ہر ایک کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: فرض کیا کہ بیلٹ اور پرس کی قیمت بالترتیب x اور y ہے۔

$x + y = 42$ _______ (i)

$7x + 4y = 213$ _______ (ii)

قالبوں کی شکل میں

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 \\ 213 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 4-7 = -3 \neq 0$$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$X = \left(\frac{adj\ A}{|A|}\right) B$$

$$= \frac{1}{-3}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 42 \\ 213 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 168 - 213 \\ -294 + 213 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -45 \\ -81 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 27 \end{bmatrix}$$

$x = 15$ ، $y = 27$

∴ پس ایک بیلٹ کی قیمت 15 روپے جبکہ پرس کی قیمت 27 روپے ہے۔

مشق 6.6

-1 مساواتوں $2x + ky = 7$ اور $4x - 9y = 4$ کو قالب شکل میں لکھیے اور k کی قیمت بھی معلوم کیجیے اگر مساواتوں میں عددی سروں کا قالب نادر ہو۔

-2 جہاں ممکن ہے ہمزاد مساواتوں کو معکوس قالب کے طریقہ سے حل کریں۔ جہاں حل ممکن نہ ہو وجہ بیان کریں۔

(i) $2x - 5y = 1$, $3x - 7y = 2$

(ii) $3x + 2y = 10$, $2y - 3x = -4$

(iii) $4x + 5y = 0$, $2x + 5y = 1$

(iv) $5x + 6y = 25$, $3x + 4y = 17$

(v) $x + y = 2$, $y = 2 + x$

(vi) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, $-4x + y = 14$

-3 معکوس قالب کے طریقہ سے حل کریں۔

$$3x - y = 10$$
$$2x + 3y = 3$$

-4 کریمر کے طریقہ سے ہمزاد مساواتوں کو حل کریں۔ جہاں حل ممکن نہ ہو، وجہ بیان کریں۔

(i) $x + 2y = 3$, $x + 3y = 5$

(ii) $2x + y = 1$, $5x + 3y = 2$

(iii) $x + 3y = 1$, $2x + 8y = 0$

(iv) $-2x + 6y = 5$, $x - 3y = -7$

(v) $x - 3y = 5$, $2x - 5y = 9$

(vi) $5x + 2y = 13$, $2x + 5y = 17$

-5 درج ذیل قالبوں کو یک درجی مساواتوں کی صورت میں لکھیے۔

(i) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(iv) $\begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

جائزہ مشق-6

I- صحیح جواب کے گرد دائرہ لگایئے۔

1. قطاروں اور کالموں کی تعداد کسی قالب میں کے .... کو ظاہر کرتی ہے۔

(a) مرتبہ (b) قطاریں
(c) کالم (d) مقطع

2. قالب جس میں صرف ایک قطار ہو، کہلاتا ہے:

(a) قطاری قالب (b) کالمی قالب
(c) ضربی ذاتی قالب (d) سکیلر قالب

3. وہ قالب، جمع کے لیے موزوں ہوتے ہیں اگر وہ ہوں:

(a) ہم مرتبہ (b) مختلف مرتبہ والے
(c) مرتبہ 2×2 (d) مرتبہ 3×3 کے

4. مربعی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد ہوتی ہے:

(a) 2×3 (b) 3×2
(c) یکساں (d) 2×1

5. دو قالب جن کے مرتبے اور متبادل ارکان یکساں ہوں کہلاتے ہیں:

(a) مساوی قالب (b) وتری قالب
(c) مربعی قالب (d) غیر مساوی قالب

6. ایک ضربی ذاتی قالب میں وتر کے ارکان ہوتے ہیں:

(a) 3 (b) 2
(c) 1 (d) 0

7. اگر $A^t = -A$ ہو تو A کہلاتا ہے:

(a) متشاکل (b) غیر متشاکل
(c) ٹرانسپوز (d) مربعی قالب

8. $(A+B)^t$ قالبوں A اور B کے لیے برابر ہوتا ہے۔

(a) A^t (b) B^t
(c) $A^t + B^t$ (d) $A^t\ B^t$

9. قالبوں کے لیے ? = $(AB)^t$

(a) A (b) B

(c) $B^t\ A^t$ (d) $A^t\ B^t$

10. قالبوں کے لیے ? = $(AB)^{-1}$

(a) A^{-1} (b) B^{-1}

(c) $B^{-1}\ A^{-1}$ (d) $A^{-1}\ B^{-1}$

II- خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. قطاروں اور کالموں کی تعداد کسی قالب کے __________ کا تعین کرتے ہیں۔

2. قالب جس میں صرف ایک قطار ہو __________ کہلاتا ہے۔

3. دو قالب جمع کے لیے موزوں ہوتے ہیں اگر وہ __________ ہوں۔

4. ایک مربعی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد __________ ہوتی ہے۔

5. دو قالب جو ہم مرتبہ قالب __________ کہلاتے ہیں اگر ان کے متبادل ارکان بھی یکساں ہوں۔

6. ضربی ذاتی قالب میں وتر کے ارکان __________ ہوتے ہیں۔

7. $(AB)C = A(BC)$ جبکہ A ، B اور C قالب ہیں تو یہ __________ بلحاظ ضرب کہلاتا ہے۔

8. اگر $A^t = -A$ ہو تو A قالب __________ کہلاتا ہے۔

9. قالبوں میں __________ = $(AB)^t$

10. قالبوں میں __________ = $(AB)^{-1}$

خلاصہ SUMMARY

قالب: دو بریکٹوں میں قاعدہ کے تحت اعداد کی مستطیلی ترتیب قالب کہلاتی ہے۔

قالب کا مرتبہ: قطاروں اور کالموں کی تعداد، قالب کے مرتبہ کا تعین کرتے ہیں۔

قطاری قالب: قالب جس میں صرف ایک ہی قطار ہو قطاری قالب کہلاتا ہے۔

کالمی قالب: قالب جس میں صرف ایک ہی کالم ہو، کالمی قالب کہلاتا ہے۔

مربعی قالب: ایسا قالب جس میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر ہو، مربعی قالب کہلاتی ہے۔

مستطیلی قالب: مستطیلی قالب میں قطاروں اور کالموں کی تعداد برابر نہیں ہوتی۔

صفری قالب: اگر کسی قالب میں تمام ارکان صفر ہوں وہ صفری قالب کہلاتا ہے۔

وحدانی یا ضربی ذاتی قالب: ضربی ذاتی قالب میں وتر کے ارکان '1' اور غیر وتری ارکان تمام صفر ہوتے ہیں۔

ٹرانسپوز قالب: کسی قالب کے کالموں اور قطاروں کو آپس میں بدلنے سے حاصل ہونے والا قالب اس قالب کا ٹرانسپوز کہلاتا ہے۔

متشاکل قالب: اگر $A' = A$ ہو تو A متشاکل قالب کہلاتا ہے۔

غیر متشاکل قالب: اگر $A' = -A$ ہو تو A غیر متشاکل قالب کہلاتا ہے۔

قالب کا مقطع: وہ حقیقی عدد جو ایک مربعی قالب کی قیمت ہو قالب کا مقطع کہلاتا ہے۔

نادر قالب: اگر کسی قالب کا مقطع صفر ہو تو وہ نادر قالب وگرنہ غیر نادر قالب کہلاتا ہے۔

2×2 مرتبہ والی مربعی قالب کا ایڈ جائنٹ: یہ قالب اس قالب کے وتری ارکان کو آپس میں بدل کر باقی دو ارکان کی علامت تبدیل کر کے حاصل ہوتا ہے۔

مربعی قالب کا ضربی معکوس: کوئی قالب B، قالب A کا ضربی معکوس ہوگا اگر $AB = I$ ہو۔

یونٹ 7

جیومیٹری کے بنیادی اصول

FUNDAMENTALS OF GEOMETRY

- زاویوں کی خصوصیات
- متماثل اور ایک جیسی اشکال
- چوکور
- متوازی خطوط
- متماثل مثلثیں
- دائرہ

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

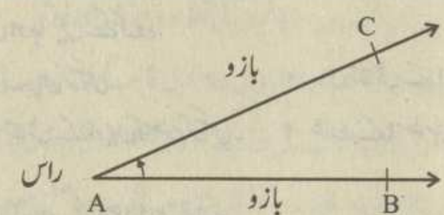
- متصلہ، سپلیمنٹری اور کمپلیمنٹری زاویوں کی تعریف بیان کر سکیں۔
- راسی متقابل کے زاویوں کی تعریف بیان کر سکیں۔
- نامعلوم متصلہ، کمپلیمنٹری، سپلیمنٹری اور راسی متقابل کے زاویوں کو معلوم کر سکیں۔
- مثلث کے نامعلوم زاویوں کو معلوم کر سکیں۔
- متوازی خطوط کی تعریف بیان کر سکیں۔
  - دو خطوط جو ایک دیے گئے خط کے متوازی ہوں ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔
  - اگر تین متوازی خطوط کو دو خطوط اس طرح قطع کریں کہ متوازی خطوط سے ایک خط قاطع پر مساوی قطعات بنیں تو اس طرح دوسرے خط پر بننے والے قطعات مساوی ہوتے ہیں۔
  - اگر کوئی خط مثلث کے ایک ضلع کی تنصیف کرے اور دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی بھی تنصیف کرے گا۔
- اشکال کی مدد سے درج ذیل متوازی خطوط کی خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
- دو متوازی خطوط کو قطع کرنے والا ایک ترچھا خط کھینچیے اور اس خط کے ایک ہی طرف متناظرہ زاویوں، متبادلہ اندرونی زاویوں، راسی متقابل کے زاویوں اور اندرونی زاویوں کو ظاہر کر سکیں۔
- جب ایک ترچھا خط دو متوازی خطوط کو قطع کرے تو زاویوں کے جوڑوں کے درمیان درج ذیل تعلق بیان کر سکیں۔
  - متناظرہ زاویوں کے جوڑے برابر ہوتے ہیں۔ متبادلہ اندرونی زاویوں کے جوڑے برابر ہوتے ہیں۔ ترچھے خط کے ایک ہی طرف زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں انہیں اشکال سے بھی ظاہر کیجیے۔
- متماثل اور ایک جیسی اشکال کی شناخت کر سکیں۔
- دو مثلثوں کے درمیان متماثل ہونے کی خصوصیات کا اطلاق کر سکیں۔
  - $SSS \cong SSS$, • $SAS \cong SAS$, • $ASA \cong ASA$, • $RHS \cong RHS$,
- مربع کی درج ذیل خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
  - مربع کے چاروں اضلاع لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
  - مربع کے چاروں زاویے قائمہ زاویے ہوتے ہیں۔
  - مربع کے وتر ایک دوسرے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں اور لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
- مستطیل کی درج ذیل خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
  - مستطیل کے ہر دو مخالف اضلاع لمبائی میں برابر اور متوازی ہوتے ہیں۔
  - مستطیل کے چاروں زاویے قائمہ زاویے ہوتے ہیں۔
  - مستطیل کے وتر ایک دوسرے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔
- متوازی الاضلاع کی درج ذیل خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
- متوازی الاضلاع کے ہر دو مخالف اضلاع لمبائی میں برابر اور متوازی ہوتے ہیں۔
  - متقابلہ زاویے برابر ہوتے ہیں۔
  - متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔
  - دائرہ، اس کے مرکز، رداس، قطر، کاڈ، قوس، بڑی قوس، چھوٹی قوس، نصف دائرہ اور دائرہ کے حصوں کو بیان کر سکیں۔
- درج ذیل خصوصیات کو ظاہر کر سکیں۔
  - نصف دائرہ میں زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔
  - دائرہ کے ایک ہی حصہ میں زاویے برابر ہوتے ہیں۔
  - دائرہ کی چھوٹی قوس کا مرکزی زاویہ متناظرہ بڑی قوس کے مرکزی زاویہ کا دوگنا ہوتا ہے۔
- درج بالا خصوصیات کا جیومیٹری کی مختلف اشکال پر اطلاق کر سکیں۔

7.1 زاویوں کے خواص PROPERTIES OF ANGLES

زاویوں کے خواص کا مطالعہ کرنے سے پہلے آیئے ہم پچھلی جماعتوں میں جو کچھ پڑھا اس کا اعادہ کریں۔

زاویہ Angle

زاویہ دو ایسی شعاعوں کا یونین ہوتا ہے جو ایک مشترک نقطہ سے شروع ہوتی ہیں۔ یہ شعاعیں زاویے کے بازو اور مشترکہ نقطہ، زوایہ کا راس کہلاتا ہے۔



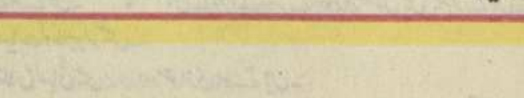
زاویہ کے نام یوں رکھے جاتے ہیں:

1- راس کے نام سے جیسا کہ $\angle A$

2- راس کے علاوہ دونوں بازوؤں کے ایک ایک نقطہ کو ساتھ ملا کر۔ اس میں نقطہ راس کو درمیان میں لکھا جاتا ہے۔
$\angle BAC$ یا $\angle CAB$

زاویہ مستقیم Straight Angle

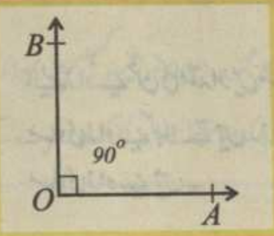
زاویہ مستقیم 180^o کا ہوتا ہے اور یہ دو قائمہ زاویوں کے برابر ہوتا ہے۔ زاویہ مستقیم کے دونوں بازو مخالف اطراف میں کھلتے ہیں اور ایک خط مستقیم بناتے ہیں۔



زاویہ قائمہ Right Angle

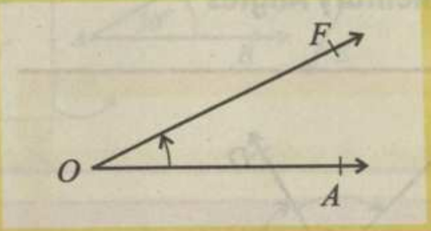
دی ہوئی شکل ایک قائمہ زاویہ کی ہے۔ قائمہ زاویہ 90^o کا ہوتا ہے۔

$m\angle AOB = 90^o$



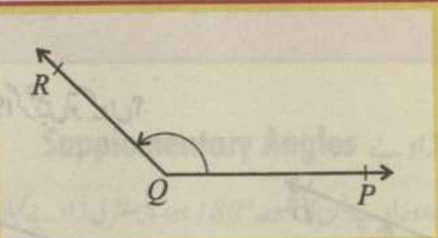
حادہ زاویہ Acute Angle

ایک حادہ زاویہ 0^o سے بڑا اور 90^o سے کم ہوتا ہے۔
زاویہ 'O' ایک حادہ زاویہ ہے۔



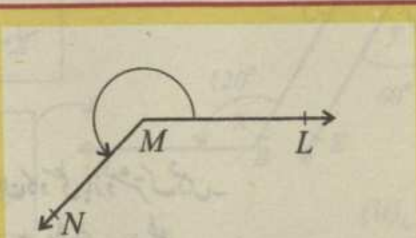
منفرجہ زاویہ Obtuse Angle

منفرجہ زاویہ 90^o سے بڑا اور 180^o سے چھوٹا ہوتا ہے۔ زاویہ Q ایک منفرجہ زاویہ ہے۔



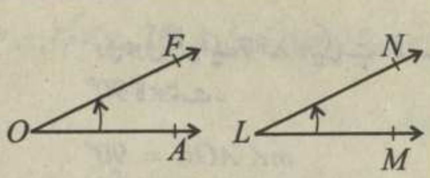
زاویہ منعکس Reflex Angle

زاویہ منعکس 180^o سے بڑا اور 360^o سے کم ہوتا ہے۔ زاویہ M ایک منعکس زاویہ ہے۔



مساوی زاویے **Equal Angles**

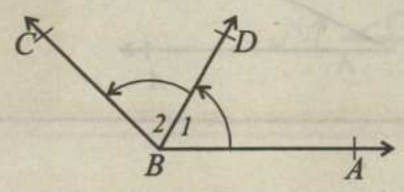
ایسے زاویے جن کی مقداریں مساوی ہوں، مساوی زاویے کہلاتے ہیں۔ زاویہ 'O' اور 'L' مساوی زاویے ہیں۔



7.1.1 متصلہ، کمپلیمنٹری اور سپلیمنٹری زاویے **Adjacent, Complementary and Supplementary Angles**

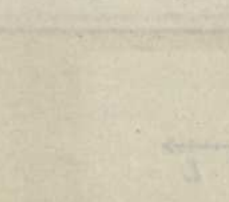
متصلہ زاویے **Adjacent Angles**

ایک ہی مشترکہ راس پر بننے والے دو زاویے جن کا ایک بازو مشترک ہو۔ دی گئی شکل میں 1∠ اور 2∠ دو متصلہ زاویے ہیں جن کا مشترک راس B اور مشترک بازو BD ہے۔

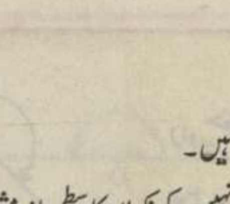


مثال:-

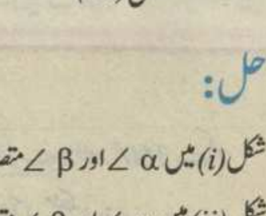
کیا نیچے دی گئی اشکال زاویے α اور β متصلہ زاویے ہیں؟ اگر نہیں تو کیوں؟



شکل (i)



شکل (ii)



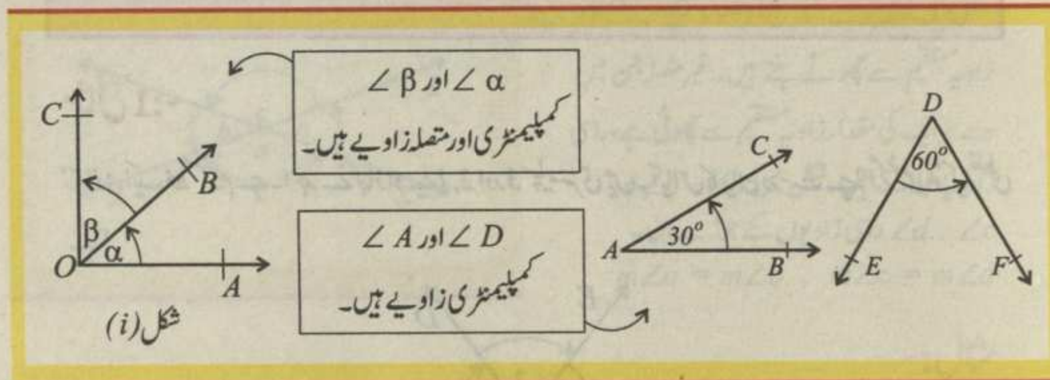
شکل (iii)

حل:

شکل (i) میں α∠ اور β∠ متصلہ زاویے ہیں۔
شکل (ii) میں α∠ اور β∠ متصلہ زاویے نہیں۔ کیونکہ ان کا وسطی بازو مشترک نہیں۔
شکل (iii) میں α∠ اور β∠ متصلہ زاویے نہیں کیونکہ ان میں مشترک راس نہیں۔

کمپلیمنٹری زاویے **Complementary Angles**

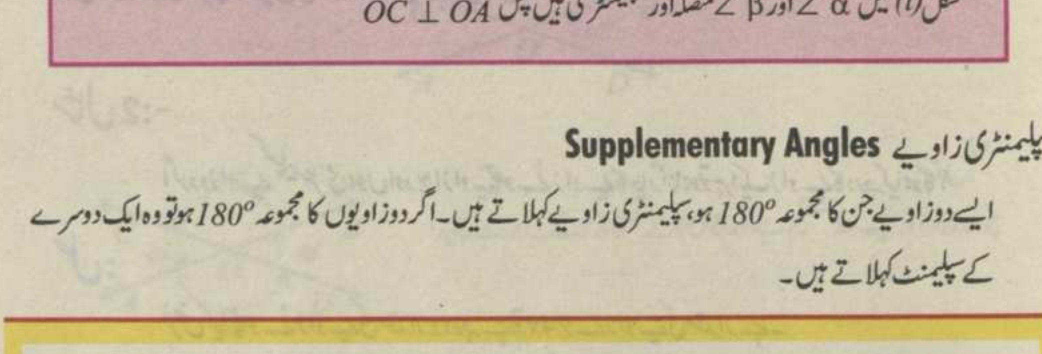
اگر دو زاویوں کا مجموعہ 90^o ہو تو وہ کمپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔ اگر دو زاویوں کا مجموعہ زاویہ قائمہ کے برابر یعنی 90^o ہو (ضروری نہیں کہ وہ متصلہ ہوں) ایک دوسرے کے کمپلیمنٹ کہلاتے ہیں۔



نوٹ:
اگر دو زاویے متصلہ اور کمپلیمنٹری ہوں تو ان کے بیرونی بازو ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔
شکل (i) میں $\angle \alpha$ اور $\angle \beta$ متصلہ اور کمپلیمنٹری ہیں پس $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OA}$

سپلیمنٹری زاویے **Supplementary Angles**

ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ 180^o ہو، سپلیمنٹری زاویے کہلاتے ہیں۔ اگر دو زاویوں کا مجموعہ 180^o ہو تو وہ ایک دوسرے کے سپلیمنٹ کہلاتے ہیں۔

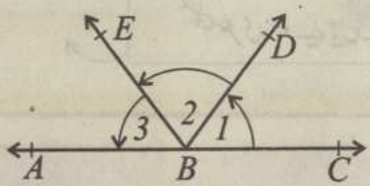


نوٹ:

اگر دو زاویے متصلہ اور سپلیمنٹری ہوں تو ان کے بیرونی بازو خط مستقیم بناتے ہیں اور یوں ہی ہے۔
پچھلے صفحہ پر شکل (i) میں سے $\angle \alpha$ اور $\angle \beta$ متصلہ اور سپلیمنٹری زاویے ہیں۔ لہٰذا PQS ایک خط مستقیم ہے۔

مثال 1:-

ABC ایک خط مستقیم ہے۔ امجد نے کہا زاویے 2,1 اور 3 سپلیمنٹری ہیں۔ آیا اس کا بیان درست ہے؟ اگر نہیں تو کیا غلطی ہے؟



حل:

نہیں۔ کیونکہ سپلیمنٹری زاویوں کی تعداد دو ہوتی ہے تین نہیں۔

مثال 2:-

اگر دو زاویے کمپلیمنٹری ہوں اور بڑا زاویہ چھوٹے زاویے کا چار گنا ہو تو ہر ایک زاویے کا درجہ کیا ہوگا؟

حل:

فرض کیا چھوٹے زاویے کی مقدار x درجہ ہے تو $4x$ بڑے زاویے کی مقدار ہے۔

چونکہ x اور $4x$ کمپلیمنٹری ہیں۔

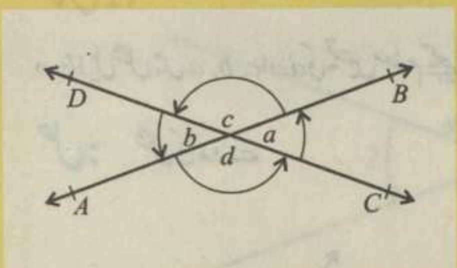
لہٰذا

$$x + 4x = 90^\circ$$
$$5x = 90^\circ$$
$$x = 18^\circ$$
$$4x = 72^\circ$$

پس مطلوبہ زاویے 18° اور 72° ہیں۔

7.1.2 راسی زاویے Vertical Angles

راسی زاویے ایسے دو زاویے ہوتے ہیں جو دو متقاطع خطوط سے بنتے ہیں اور جن میں سے ہر ایک مقدار، زاویہ مستقیم سے کم ہوتی ہے۔

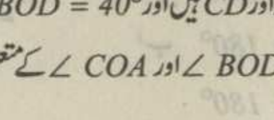


کسی ایک نقطہ پر سے متقاطع دو خطوط کھینچیے۔ کتنے زاویے، زاویہ مستقیم سے چھوٹے بنتے ہیں۔ غیر متصلہ جن میں سے ہر ایک کی مقدار زاویہ مستقیم سے چھوٹی ہے، راسی زاویے کہلاتے ہیں۔ شکل میں $\angle a$ ، $\angle b$ اور $\angle c$ ، $\angle d$ راسی زاویوں کے جوڑے ہیں۔

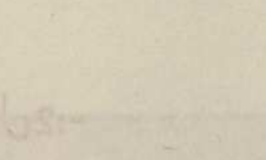
$m\angle a = m\angle b \;,\; m\angle c = m\angle d$

مثال:-

شکل میں نقطہ O پر دو متقاطع خطوط AB اور CD ہیں اور $m\angle BOD = 40^\circ$ بناتے ہیں۔ $\angle AOD$ اور $\angle AOC$ کی مقدار کیا ہوگی؟ آپ $\angle BOD$ اور $\angle COA$ کے متعلق کیا کہیں گے؟



حل:



چونکہ AOB ایک خط مستقیم ہے اور $\angle AOB$ 180° کے برابر ہے۔ لہٰذا

$m\angle AOD + m\angle BOD = 180^\circ$

$m\angle BOD = 40^\circ$ (معلوم)

$m\angle AOC = 40^\circ$ (معلوم میں دیا گیا $\angle BOD$ اور $\angle AOC$ سپلیمنٹری ہیں)

$m\angle AOD = 140^\circ$

$\because (140^\circ + 40^\circ = 180^\circ)$

$m\angle BOD = m\angle COA$

$\angle BOD$ اور $\angle COA$ راسی زاویے ہیں۔

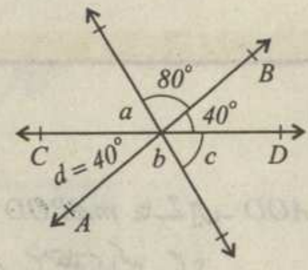
7.1.3 نامعلوم زاویے حل کرنا Calculate Unknown Angles

آیئے درج ذیل مثالوں میں نامعلوم زاویے کو متصلہ، کمپلیمنٹری، سپلیمنٹری اور راسی زاویوں کی مدد سے معلوم کریں۔

مثال 1:-

درج ذیل شکل میں a, b, c اور d کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل: شکل کی مدد سے



$$c + 40^\circ + 80^\circ = 180^\circ$$
$$c + 120^\circ = 180^\circ$$
$$c = 180^\circ - 120^\circ$$
$$c = 60^\circ$$

لیکن $c = a = 60^\circ$ (راسی زاویے)

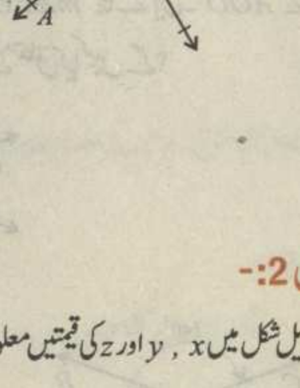
اب $a + d + b = 180^\circ$

$$60^\circ + 40^\circ + b = 180^\circ$$
$$100^\circ + b = 180^\circ$$
$$b = 80^\circ$$

مثال 2:-

درج ذیل شکل میں x ، y اور z کی قیمتیں معلوم کیجیے۔

حل:- شکل کی مدد سے



$$x + 50^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$
$$x + 110^\circ = 180^\circ$$
$$x = 180^\circ - 110^\circ$$
$$x = 70^\circ$$

لیکن $x = y$ (راسی زاویے)

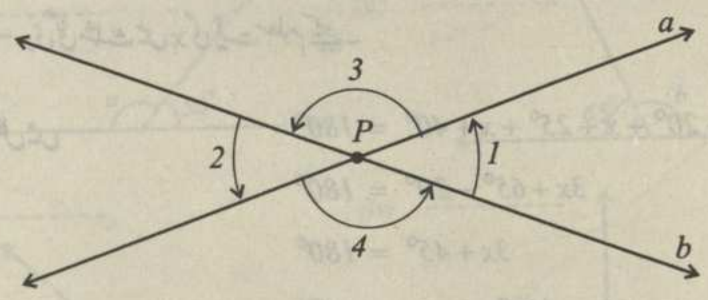
$$y = 70^\circ$$

اب $y + z = 180^\circ$

$$70^\circ + z = 180^\circ$$
$$z = 110^\circ$$

مسئلہ THEOREM

اگر دو خطوط مستقیم قطع کریں تو راسی زاویے برابر ہوتے ہیں۔



خطوط a اور b نقطہ P پر متقاطع ہیں اور ($\angle 1$ اور $\angle 2$) اور ($\angle 3$ اور $\angle 4$) راسی زاویوں کے جوڑے بناتے ہیں۔

اشارہ:
$\angle 1$ اور $\angle 2$ ایک ہی زاویہ کے سپلیمنٹ ہوں تو وہ آپس میں برابر ہوں گے۔

یاد رکھیے کہ:

- اگر دو زاویے ایک ہی زاویے کے کمپلیمنٹ ہوں تو وہ مساوی ہوتے ہیں۔
- اگر دو زاویے مساوی زاویوں کے کمپلیمنٹ ہوں تو وہ مساوی ہوتے ہیں۔
- اگر دو خطوط مستقیم آپس میں قطع کریں تو راسی زاویے مساوی ہوتے ہیں۔
- اگر دو زاویے ایک ہی زاویے کے سپلیمنٹ ہوں تو وہ مساوی ہوتے ہیں۔

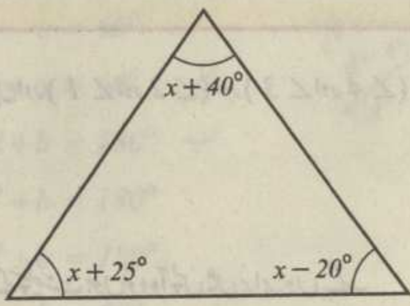
7.1.4 کسی مثلث کے نامعلوم زاویوں کو حل کرنا Calculate Unknown Angles of a Triangle

کسی مثلث کے نامعلوم زاویوں کی مقدار معلوم کرنے کے لیے ، ہم درج ذیل مثالوں کو مدنظر رکھتے ہیں اور پھر حل کرتے ہیں۔

مثال 1:- دی گئی مثلث میں x کی قیمت معلوم کیجیے۔

حل: شکل میں

$$x - 20^\circ + x + 25^\circ + x + 40^\circ = 180^\circ$$
$$3x + 65^\circ - 20^\circ = 180^\circ$$
$$3x + 45^\circ = 180^\circ$$
$$3x = 135^\circ \Rightarrow x = 45^\circ$$

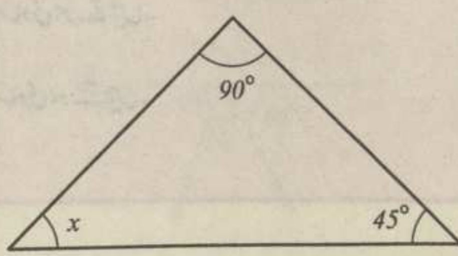


پس تینوں زاویے معلوم ہوتے ہیں۔ $x - 20^\circ = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$

$$x + 25^\circ = 45^\circ + 25^\circ = 70^\circ$$
$$x + 40^\circ = 45^\circ + 40^\circ = 85^\circ$$

مثال 2:- دی گئی مثلث میں x معلوم کریں۔

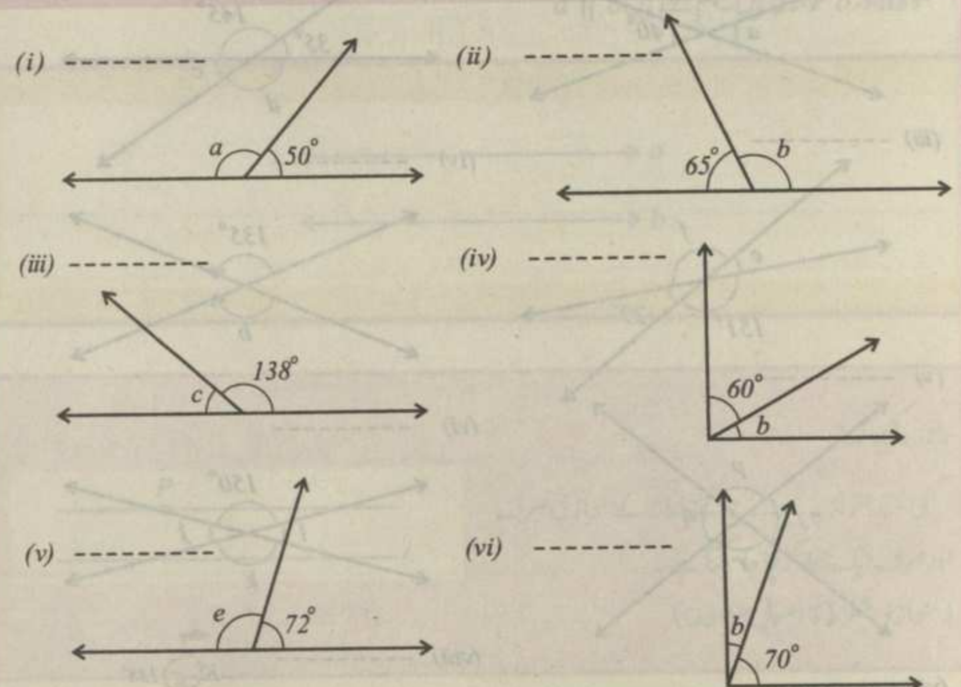
حل: ہم جانتے ہیں کہ



$$x + 45^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$
$$x + 135^\circ = 180^\circ$$
$$x = 180^\circ - 135^\circ$$
$$x = 45^\circ$$

مشق 7.1

1- دیے گئے زاویوں کی مقداریں لکھیے اور دیکھیے کہ یہ کمپلیمنٹری ہیں یا کہ سپلیمنٹری؟



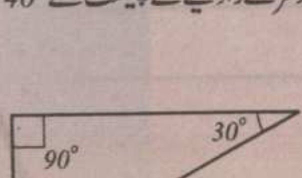
2- دو زاویے سپلیمنٹری ہیں اور بڑا زاویہ چھوٹے زاویے سے 30^o بڑا ہے۔ ہر ایک زاویہ کی مقدار کتنی ہے؟

3- اگر کسی زاویے میں 40^o جمع کیا جائے تو حاصل شدہ زاویہ، پہلے والے زاویہ کے سپلیمنٹ کے برابر آتا ہے۔ پہلے والے زاویہ کی مقدار معلوم کریں۔

4- دو زاویوں کا مجموعہ 100^o ہے اور ان کے سپلیمنٹوں کا فرق 100^o ہے۔ زاویوں کی مقداریں معلوم کیجیے۔

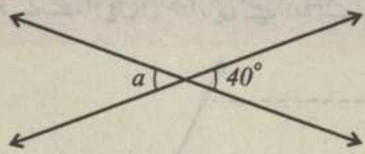
5- دو زاویوں کا مجموعہ 100^o ہے پہلے زاویہ کا سپلیمنٹ دوسرے زاویے کے سپلیمنٹ سے 40^o زیادہ ہے۔ زاویے معلوم کیجیے۔

6- دی گئی مثلث کی مساوات لکھ کر x معلوم کریں۔

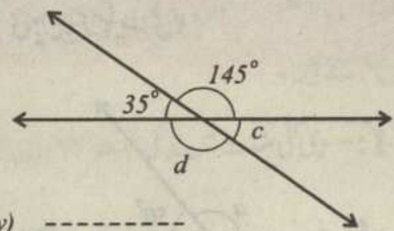


-7 حروف تہجی سے ظاہر شدہ زاویوں کی قیمتیں معلوم کریں۔

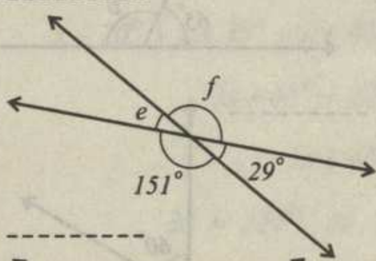
(i) ---------



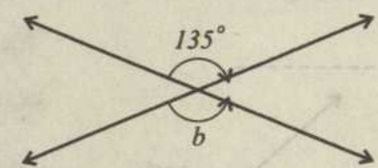
(ii) ---------



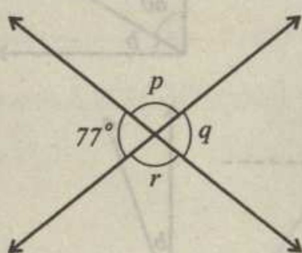
(iii) ---------



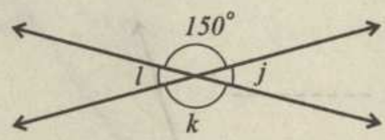
(iv) ---------



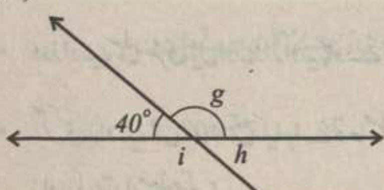
(v) ---------



(vi) ---------

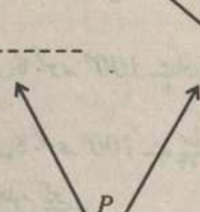


(vii) ---------

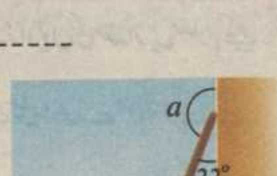


(viii) ---------

(ix) ---------



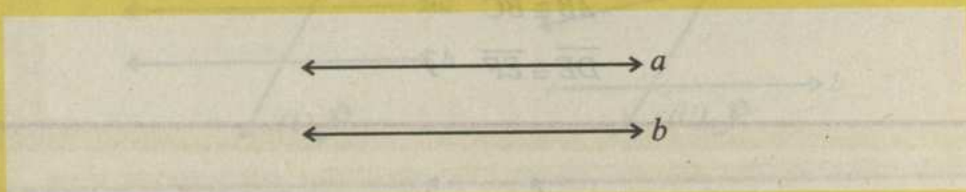
(x) ---------



7.2 متوازی خطوط PARALLEL LINES

ایک ہی مستوی میں واقع ایسے دو خطوط جو کبھی نہ ملیں، متوازی خطوط کہلاتے ہیں۔

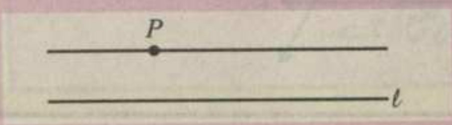
خطوط a اور b متوازی ہیں۔ ہم لکھتے ہیں $a \parallel b$



یاد رکھیے کہ:

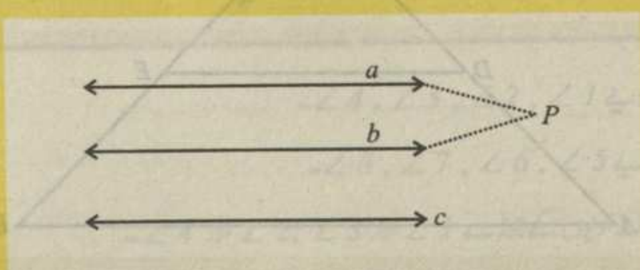
کسی نقطہ P میں سے دیے گئے خط l کے متوازی صرف اور صرف ایک خط کھینچا جا سکتا ہے۔

(متوازی خطوط کا اصول موضوعہ)



7.2.1 متوازی خطوط کے خواص Properties Of Parallel Lines

a) دو خطوط جو کسی تیسرے خط کے متوازی ہوں، آپس میں بھی متوازی ہوتے ہیں۔



خط 'a'، خط c کے متوازی ہے۔ خط b، خط c کے متوازی ہے تو خط a، خط b کے متوازی ہے۔ اگر $a \parallel c$ ، $b \parallel c$ تو $a \parallel b$۔

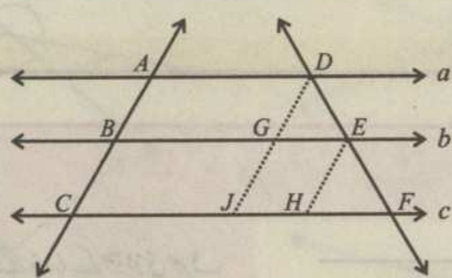
(b) اگر تین متوازی خطوط کو دو خطوط اس طرح قطع کریں کہ متوازی خطوط سے ایک خط قاطع پر مساوی قطعات بنیں تو اس طرح دوسرے خط پر بننے والے قطعات مساوی ہوتے ہیں۔

یعنی اگر $\overline{AD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{CF}$

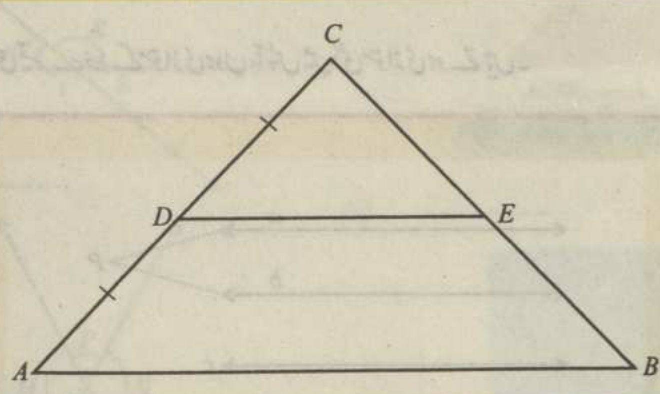
$\overline{AC}$ اور $\overline{DF}$ کوئی سے خط قاطع ہیں۔

اور $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

تو $\overline{DE} \cong \overline{EF}$



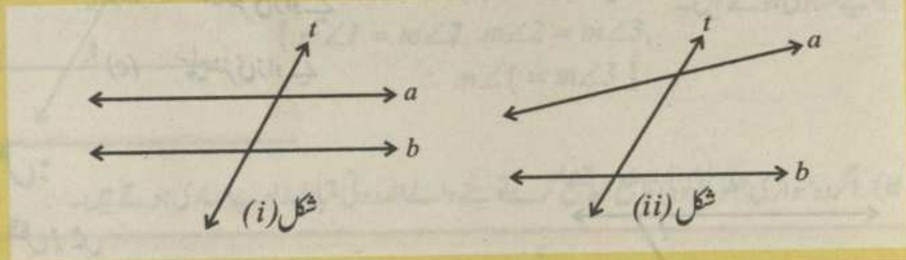
(c) اگر کوئی خط مثلث کے ایک ضلع کی تنصیف کرے اور دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی بھی تنصیف کرے گا۔



یعنی اگر ΔABC میں $\overline{CD} \cong \overline{DA}$ اور $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ہو تو $\overline{CE} \cong \overline{EB}$

7.2.2 قاطع خط Transversal

قاطع خط ایسا خط ہوتا ہے جو خطوط کو مختلف نقاط پر قطع کرے۔

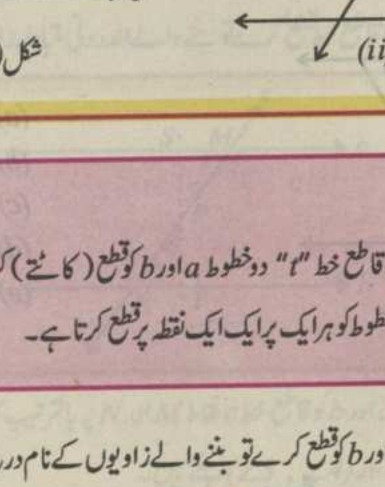


نوٹ:

شکل (i) اور (ii) میں قاطع خط "t" دو خطوط a اور b کو قطع (کاٹتے) کرتے ہیں۔

خط قاطع تین یا زیادہ خطوط کو ہر ایک پر ایک ایک نقطہ پر قطع کرتا ہے۔

اگر کوئی خط "t" دو متوازی خطوط a اور b کو قطع کرے تو بننے والے زاویوں کے نام درج ذیل طریقے سے دیے جاتے ہیں۔



1- چار اندرونی زاویے $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$۔

2- چار بیرونی زاویے $\angle 5$, $\angle 6$, $\angle 7$, $\angle 8$۔

3- دو اندرونی متبادلہ زاویوں کے جوڑے $\angle 1$ اور $\angle 3$; $\angle 2$ اور $\angle 4$۔

4- دو بیرونی متبادلہ زاویوں کے جوڑے اور $\angle 5$ اور $\angle 7$; $\angle 6$ اور $\angle 8$۔

5- قاطع خط کے ساتھ ایک ہی جانب والے اندرونی زاویوں کے جوڑے $\angle 2$ اور $\angle 3$; $\angle 1$ اور $\angle 4$۔

6- متناظرہ زاویوں کے چار جوڑے $\angle 2$ اور $\angle 6$; $\angle 1$ اور $\angle 5$ اور $\angle 3$ اور $\angle 7$; $\angle 4$ اور $\angle 8$۔

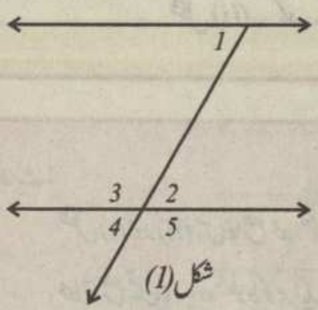
مثال:- نیچے دی گئی اشکال کو دیکھ کر درج ذیل سوالات کے جوابات دیجیے۔

(a) اندرونی متبادلہ زاویے　　　　(b) متناظرہ زاویے

(c) کمپلیمنٹری زاویے　　　　(d) راسی زاویے

(e) سپلیمنٹری زاویے

حل:



شکل (1)

شکل 1 میں

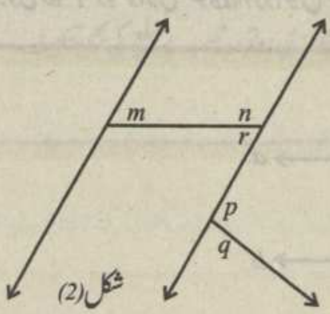
(a) $\angle 1, \angle 2$

(b) $\angle 1, \angle 4$

(c) کوئی نہیں

(d) $\angle 3, \angle 5; \angle 2, \angle 4$

(e) $\angle 3, \angle 2; \angle 2, \angle 5;$
$\angle 5, \angle 4; \angle 4, \angle 3$



شکل (2)

شکل 2 میں

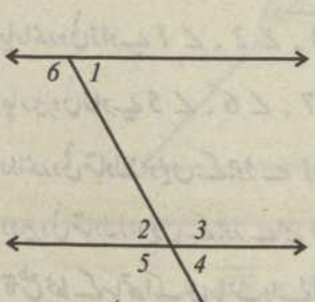
(a) $\angle m, \angle r; \angle r, \angle p$

(b) کوئی نہیں

(c) کوئی نہیں

(d) کوئی نہیں

(e) $\angle n, \angle r; \angle p, \angle q$



شکل (3)

شکل 3 میں

(a) $\angle 1, \angle 2 ; \angle 3, \angle 6$

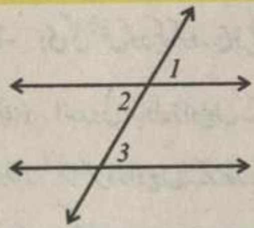
(b) $\angle 1, \angle 4 ; \angle 5, \angle 6$

(c) کوئی نہیں

(d) $\angle 2, \angle 4 ; \angle 3, \angle 5$

(e) $\angle 2, \angle 3 ; \angle 3, \angle 4 ;$
$\angle 4, \angle 5 ; \angle 2, \angle 5$

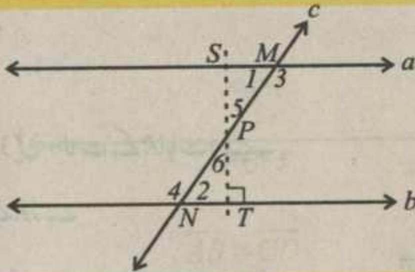
7.2.3 زاویوں کے جوڑوں میں تعلق Relation Between the Pairs of Angles



اگر دو متوازی خطوط کو کوئی خط قطع کرے تو اس سے بننے والے متناظرہ زوایے مساوی ہوتے ہیں۔

$[\ m\angle 1 = m\angle 2,\ m\angle 2 = m\angle 3,\ \therefore\ m\angle 1 = m\angle 3\ ]$

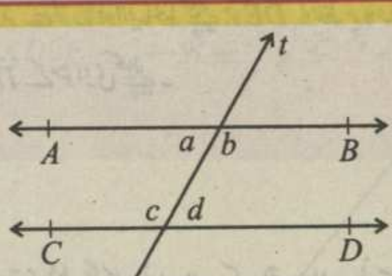
d) اگر دو متوازی خطوط کو کوئی قاطع خط قطع کرے تو بننے والے اندرونی متبادلہ زاویے مساوی ہوتے ہیں۔



$a\|b$ دو متوازی خطوط a اور b کو قاطع خط c نقاط M اور N پر بالترتیب کاٹتا ہے جس سے متبادلہ اندرونی زاویوں کے جوڑے $(\angle 2\ ,\ \angle 1)$ اور $(\angle 4\ ,\ \angle 3)$ بنتے ہیں۔

تو $m\angle 1 = m\angle 2$ اور $m\angle 3 = m\angle 4$

e) اگر دو متوازی خطوط کو قاطع خط کاٹے تو قاطع خط کے ایک ہی جانب کے اندرونی زاویے سپلیمنٹری ہوتے ہیں۔



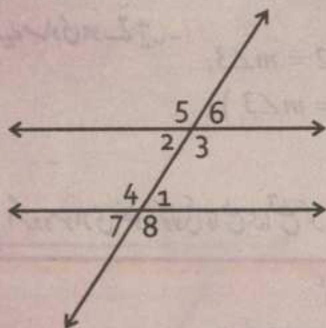
$AB\|CD$ دو متوازی خطوط کو قاطع خط t کاٹتا ہے۔

زاویے a، b، c اور d بنتے ہیں۔

$$m\angle b + m\angle d = 180^\circ$$
$$m\angle a + m\angle c = 180^\circ$$

مشق 7.2

-1 دی گئی شکل کو دیکھ کر درج ذیل سوالات کے جوابات دیجیے۔



(a) اندرونی متبادلہ زاویوں کے جوڑے

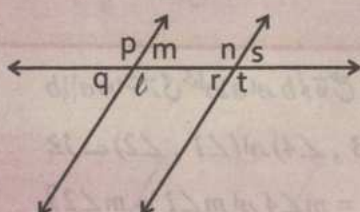
(b) متناظرہ زاویوں کے جوڑے

(c) کمپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے

(d) سپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے

(e) راسی زاویوں کے جوڑے

-2 دی گئی شکل کو دیکھیے اور درج ذیل سوالات کے جوابات دیجیے۔



(a) اندرونی متبادلہ زاویوں کے جوڑے

(b) متناظرہ زاویوں کے جوڑے

(c) کمپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے

(d) سپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے

(e) راسی زاویوں کے جوڑے

-3 خط $\overline{DE}$ سے باہر نقطہ لیجیے۔ X سے گزرتا ہوا ایسا خط کھینچیے جو $\overline{DE}$ کو نقطہ پر کاٹتا ہوا متماثل متناظرہ زاویے بناتے ہوئے اس نقطہ میں $\overline{DE}$ کے متوازی کھینچیے۔

نوٹ کیجیے کہ:

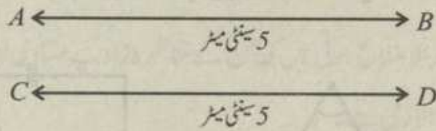
اگر کوئی قاطع خط دو ہم مستوی خطوط کو کاٹے اور ان کے ساتھ دو اندرونی سپلیمنٹری زاویوں کے جوڑے بنائے تو وہ دونوں خطوط متوازی ہوتے ہیں۔

7.3 متماثل اور متشاکل اشکال CONGRUENT AND SIMILAR FIGURES

7.3.1 متماثل اشکال Congruent Figures

لفظ ''متماثل'' لاطینی لفظ ہے جس کے معنی ''باہم رضامند'' ہیں۔ دو ہندسی اشکال جن کی جسامت یکساں اور ہم شکل ہوں متماثل کہلاتی ہیں۔

ایک شکل دوسری شکل کے متماثل ہے۔ متماثل کی علامت $\cong$ ہے۔ پس دو خط متماثل ہوں گے اگر ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں گی۔



شکل (i)

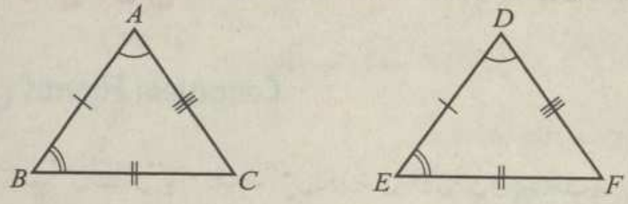
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$

تمام قطع خط سیدھے ہونے کی بنیاد پر ہم شکل ہوتے ہیں۔ ان کی جسامت یکساں ہوگی اگر ان کی لمبائیاں ایک جیسی ہوں۔

مندرجہ بالا شکل میں سینٹی میٹر $m\overline{AB} = m\overline{CD} = 5$ لہٰذا $\overline{AB}$ اور $\overline{CD}$ کی ایک جیسی جسامت کے ہیں۔

- دو قطعات جن کی لمبائیاں برابر ہوں متماثل قطعات کہلاتے ہیں۔ شکل (i) میں $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
- دو زاویے مقدار میں برابر ہوں تو وہ متماثل زاویے کہلاتے ہیں۔ $\angle ABC \cong \angle DEF$

◄ مثلثان جن کے متناظرہ حصے متماثل ہوں، متماثل مثلثان کہلاتی ہیں۔

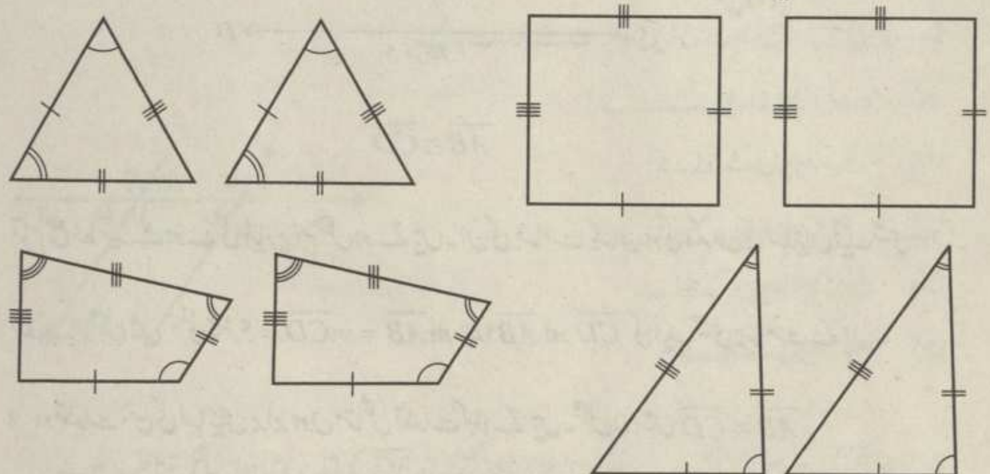


$$\overline{AB} \cong \overline{DE}\ ,\ \overline{BC} \cong \overline{EF}\ ,\ \overline{AC} \cong \overline{DF}$$

اور $m\angle A = m\angle D\ ,\ m\angle B = m\angle E\ ,\ m\angle C = m\angle F$

$$\Delta\, ABC \cong \Delta\, DEF$$

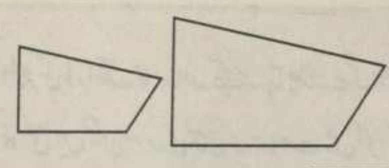
دو کثیر الاضلاع جن کے راسوں کے جوڑے اس طرح بنائے جائیں کہ متناظرہ زاویے اور اضلاع متماثل ہوں تو وہ متماثل کثیر الاضلاع کہلاتی ہیں۔



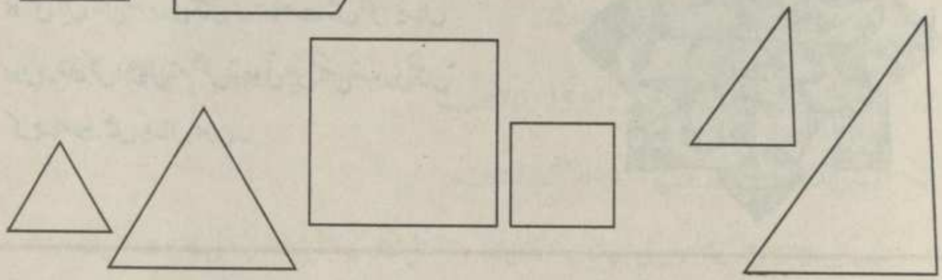
یہ ڈرائنگ ایم سی ایسچر نامی ایک فن کار نے بنائی ہے۔ غور سے دیکھیے آپ اگر دو ہم شکل حصوں کو کاٹ لیں اور ایک کے اوپر دوسرے کو رکھیں تو دوسرے کو ٹھیک ٹھیک چھپا لے گا۔

متماثل اشکال سائز اور شکل میں ایک جیسی ہوتی ہے۔

متشاکل اشکال Similar Figures



نیچے دی گئی کثیر الاضلاع میں ہر جوڑا آپس میں متشاکل ہے۔



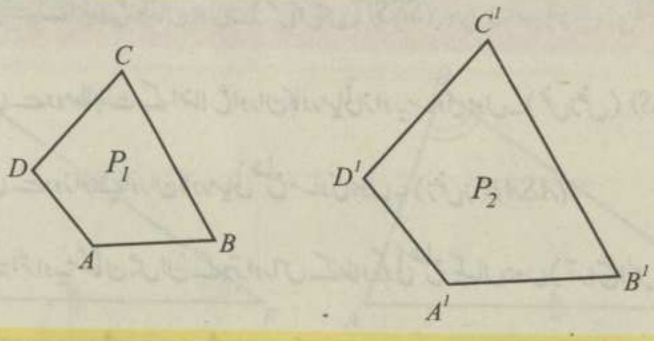
متشاکل کثیر الاضلاع ایسی کثیر الاضلاع ہوتی ہیں کہ جن کے متناظرہ زاویے مساوی اور متناظرہ اضلاع تناسب میں ہوں۔

یادرہے کہ دونوں شرائط کا ہونا لازمی ہے۔

چونکہ تعریف کا عکس بھی درست ہے لہٰذا اس سے یہ عیاں ہے کہ اگر دو کثیر الاضلاع متشاکل ہوں تو ان کے متناظرہ زاویے مساوی ہوتے ہیں اور ان کے متناظرہ اضلاع متناسب ہوتے ہیں۔

تشاکل، تماثل کی طرح ایک خاص قسم کی مطابقت میں ہوتی ہے۔

اگر کثیر الاضلاع P_1 ، کثیر الاضلاع P_2 کے متشاکل ہو $P_1 \sim P_2$ لکھا جاتا ہے۔



1- $m\angle A = m\angle A^{l}$, $m\angle B = m\angle B^{l}$
$m\angle C = m\angle C^{l}$, $m\angle D = m\angle D^{l}$

2- $\dfrac{AB}{A^{l}B^{l}} = \dfrac{BC}{B^{l}C^{l}} = \dfrac{CD}{C^{l}D^{l}} = \dfrac{DA}{D^{l}A^{l}}$

ایسچر کی ڈرائنگ کا مطالعہ کیجئے۔ پتا چلتا ہے کہ اشکال ہم شکل تو ہوسکتی ہیں لیکن ضروری نہیں کہ جسامت میں بھی یکساں ہوں۔ تشاکل اشکال ہم شکل تو ہوتی ہیں لیکن ضروری نہیں کہ جسامت میں یکساں ہوں۔

7.3.2 علامت (≅) Symbol

علامت (≅) دو ہندسی اشکال جن کی جسامت اور شکل یکساں ہوں متماثل اشکال کہلاتی ہیں۔ تماثل کی علامت (≅) ہے۔

7.3.3 تماثل کی خصوصیات

1. متماثل اشکال ہر لحاظ سے یکساں ہوتی ہیں یعنی کہ ان کی شکل یکساں اور جسامت بھی یکساں ہوتی ہے۔

2. مثلثان متماثل ہوتی ہیں اگر ان پر درج ذیل میں سے کوئی ایک بھی شق لاگو ہو۔

(a) مطابقت کے اضلاع یکساں ہوں۔ (ض ض ض) *(SSS)*

(b) کوئی سے دو مطابقت کے اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ مساوی ہوں۔ (ض زض) *(SAS)*

(c) کوئی سے دو زاویے اور ان کا درمیانی ضلع مساوی ہوں۔ (زض ز) *(ASA)*

(d) قائمۃ الزاویہ مثلثان میں ان کے وتر اور اس کے علاوہ کوئی ضلع یکساں ہوں (آر ایچ ایس) *(RHS)*

3. دائرے جن کے رداس متماثل ہوں، متماثل دائرے کہلاتے ہیں۔

4. دو زاویے جن کی پیائش یکساں ہو۔ متماثل زاویے کہلاتے ہیں۔

مشق 7.3

سوال 1 - 3 تک کیا بننے والی اشکال متشاکل ہیں؟

-1 تمام مربع، تمام مستطیل، تمام باقاعدہ مسدسیں

-2 دو مستطیلیں جن کے اضلاع 8 ,12 اور 15 ,10 ہوں۔

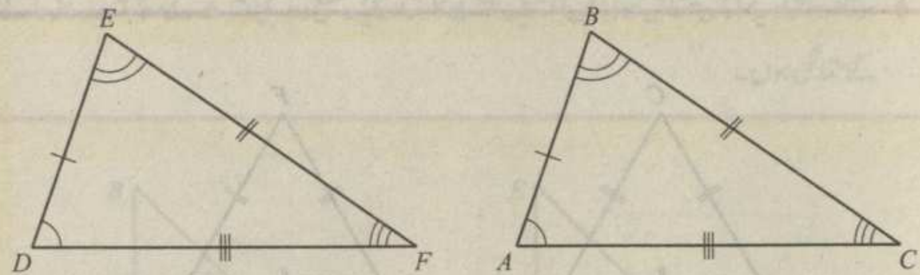
-3 دو معین اشکال جن کے زاویے 35° اور 125° ہوں۔

-4 ایک کثیر الاضلاع کے ضلعوں کی لمبائیاں 8 سینٹی میٹر، 7 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر، 5 سینٹی میٹر، 4 سینٹی میٹر اور 9 سینٹی میٹر ہیں۔اس کے متشاکل کثیر الاضلاع 6 سینٹی میٹر لمبے ضلع کے مطابق ضلع کی لمبائی 12 سینٹی میٹر ہے۔ دوسری کثیر الاضلاع کے باقی ضلعوں کی لمبائیاں معلوم کیجیے۔

-5 ایک چوکور میں اضلاع کی لمبائیاں 2 سینٹی میٹر، 4 سینٹی میٹر، 5 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر اور 7 سینٹی میٹر ہیں۔ اس کے متشاکل چوکور میں سب سے بڑے ضلع کی لمبائی 21 سینٹی میٹر ہے۔دوسرے اضلاع کی لمبائیاں معلوم کریں۔

-6 ایک کثیر الاضلاع کے اضلاع کی لمبائیاں 5 سینٹی میٹر، 2 سینٹی میٹر، 7 سینٹی میٹر، 3 سینٹی میٹر اور 4 سینٹی میٹر ہیں۔اس کے متشاکل اضلاع کے فیصلوں کی لمبائیاں معلوم کریں جبکہ پہلی والی کے 2 سینٹی میٹر لمبائی والے ضلع کے مقابلہ میں اس کے ضلع کی لمبائی 6 سینٹی میٹر ہو۔ دونوں کثیر الاضلاع احاطوں میں کیا نسبت ہوگی؟

-7 درج ذیل شکل میں متناظرہ اضلاع اور زاویوں کے جوڑوں کے نام لکھیے جو آپس میں متماثل ہیں۔



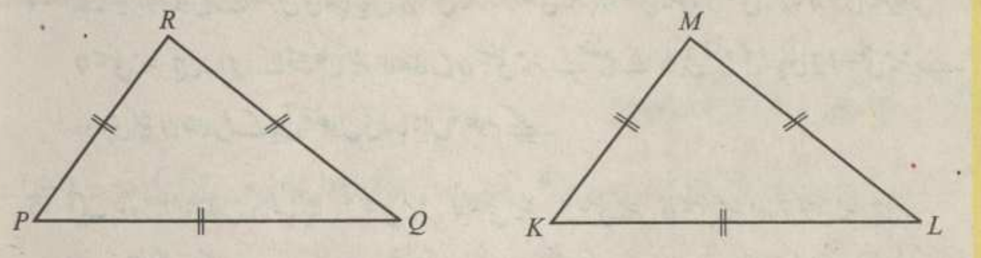
-8 کیا تمام متشاکل اشکال متماثل بھی ہوتی ہیں؟ واضح کریں۔

-9 کیا تمام متماثل اشکال متشاکل بھی ہوتی ہیں؟ واضح کریں۔

7.4 متماثل مثلثان CONGRUENT TRIANGLES

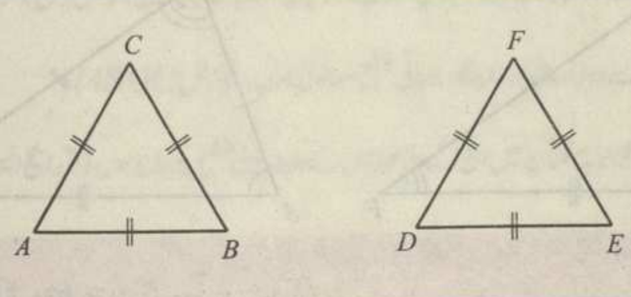
دو ایسی مثلثان متماثل مثلثان ہوتی ہیں کہ جن کے راسوں کے جوڑے بنانے کے بعد اگر ان کے متناظرہ حصوں کی مطابقت لی جائے (زاویوں اور ضلعوں کی) تو وہ برابر ہوتے ہیں۔

نیچے شکل کو علامتی طور پر یوں لکھتے ہیں۔ $\Delta PQR \cong \Delta KLM$ جس کا مطلب ہے مثلث PQR مثلث KLM کے متماثل ہے۔



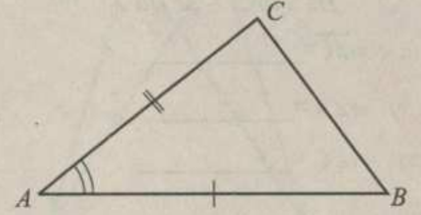
دو مثلثان کے درمیان تماثل کی خصوصیات

- کسی دی گئی مطابقت میں دو مثلثان متماثل ہوتی ہیں اگر پہلی مثلث کے تمام اضلاع دوسری مثلث کے مطابقت رکھنے والے تمام اضلاع کے برابر ہوں۔ (ض ض ض $\cong$ ض ض ض) $(SSS \cong SSS)$

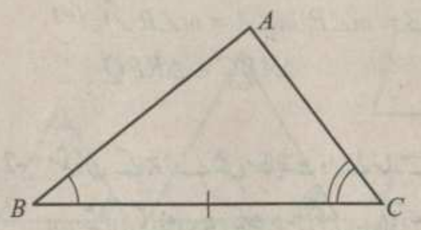


درج بالا شکل میں ΔABC اور ΔDEF متماثل ہیں۔

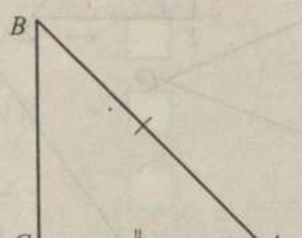
◀ دو مثلثان آپس میں متماثل ہوتی ہیں اگر ایک مثلث کے دو اضلاع اور ان کا درمیانی زاویہ، دوسری مثلث کے مطابقت رکھنے والے دو اضلاع اور درمیانی زاویہ کے برابر ہوں۔ (ض زض ≅ ض زض) $(SAS \cong SAS)$



◀ دو مثلثان متماثل ہوتی ہیں اگر ایک مثلث کے دو زاویے اور درمیانی ضلع دوسری مثلث کے مطابقت رکھتے دو زاویوں اور ان کے درمیانی ضلع کے متماثل ہوں۔ (زض ز ≅ زض ز) $(ASA \cong ASA)$



◀ دو قائمۃ الزاویہ مثلثان متماثل ہوتی ہیں اگر ایک مثلث کا وتر اور ایک ضلع دوسری مثلث کے مطابقت رکھنے والے وتر اور ضلع کے متماثل ہوں۔



مشق 7.4

1- خالی جگہوں کو پر کیجیے۔

(a) اگر $\Delta ABC \cong \Delta FDE$ ہو تو

(i) $m\overline{AB}=$__________ (ii) $m\overline{BC}=$__________

(iii) $m\overline{AC}=$__________ (iv) $m\angle A=$__________

(v) $m\angle B=$__________ (vi) $m\angle C=$__________

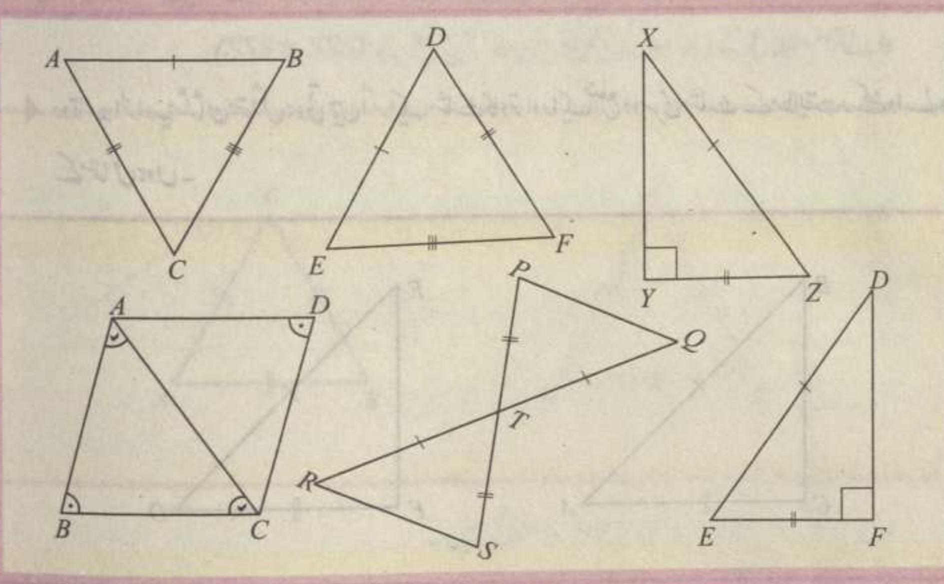
(b) مثلث PQR میں اضلاع PR اور QR کا درمیانی زاویہ __________ ہے۔

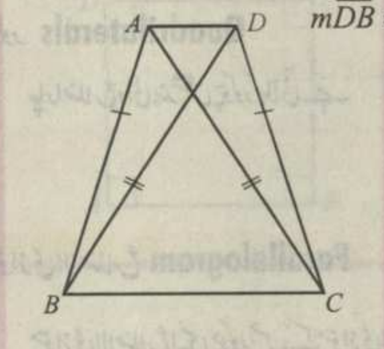
(c) مثلث DEF میں $\angle E$ اور $\angle F$ کے درمیان والا ضلع __________ ہے۔

(d) اگر $\overline{AB}=\overline{QP}$, $m\angle B=m\angle P$, $m\overline{BC}=m\overline{PR}$ تو تماثل کی حالت __________ کی رو سے $\Delta ABC \cong \Delta QPR$

(e) اگر $m\angle A=m\angle R$, $m\angle B=m\angle P$ اور $m\overline{AB}=m\overline{RP}$ تو __________ تماثل کی رو سے $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$

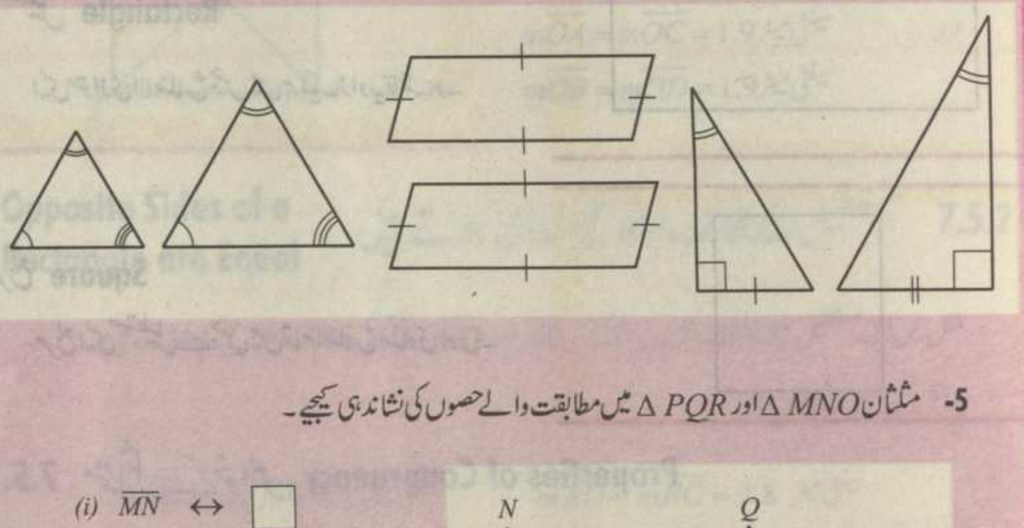
2- مثلثان کے جوڑے میں مطابقت والے سارے جوڑے ایک جیسے نشانوں سے نشان زدہ کیے گئے ہیں۔ ان مثلثان کی نشاندہی کیجیے جو متماثل بن جاتی ہیں۔ اِن کے تماثل کی علامات بھی لکھیے۔





-3 شکل میں ABC اور DBC ایک ہی قاعدہ $\overline{BC}$ پر دو مثلثان ہیں اس طرح سے کہ $m\overline{AB} = m\overline{DC}$ اور $m\overline{DB} = m\overline{AC}$ جبکہ A اور D، BC ایک ہی جانب واقع ہیں۔ مثلثان ADB اور DAC میں متناظرہ مطابقت والے حصے اس طرح لکھیں کہ ان میں تماثل قائم ہو آپ اس تماثل کے لیے کونسی حالت کہیں گے؟ اگر $m\angle DCA = 40^\circ$ اور $m\angle BAD = 100^\circ$ تو $\angle ADB$ کی مقدار معلوم کریں۔

-4 ان اشکال میں تماثل، متشاکل یا کوئی نہیں، کے تعلق کی نشاندہی کیجیے۔



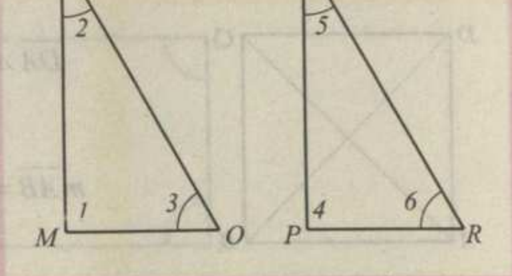
-5 مثلثان ΔMNO اور ΔPQR میں مطابقت والے حصوں کی نشاندہی کیجیے۔

(i) $\overline{MN} \leftrightarrow$ ☐

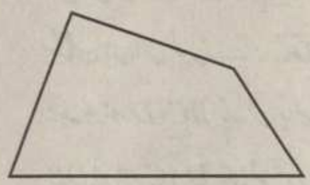
(ii) $\overline{NO} \leftrightarrow$ ☐

(iii) $\overline{PR} \leftrightarrow$ ☐

(iv) $\angle 1 \leftrightarrow$ ☐

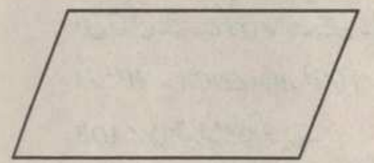


QUADRILATERALS چوکور 7.5



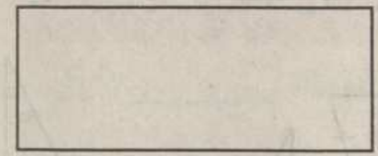
چوکور Quadrilaterals

چار اضلاع والی بند شکل چوکور کہلاتی ہے۔



متوازی الاضلاع Parallelogram

متوازی الاضلاع ایسی چوکور جس کے متوازی اضلاع کے دو جوڑے ہوں۔



مستطیل Rectangle

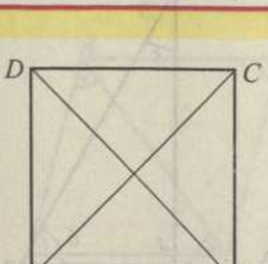
ایسی متوازی الاضلاع جس میں ہر ایک زاویہ قائمہ ہو۔

مربع Square

مربع ایسی مستطیل ہے جس میں تمام اضلاع مساوی ہوں۔

Properties of Congruency متماثل کے خواص 7.5.1

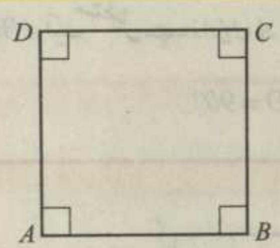
مربع کے چاروں اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔



ABCD ایک مربع ہے۔ $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CD}$ اور $\overline{DA}$ کی پیمائش کیجیے۔ ہمیں پتا چلتا ہے کہ

$m\overline{AB} = m\overline{BC} = m\overline{CD} = m\overline{DA} = 2.8$ سینٹی میٹر

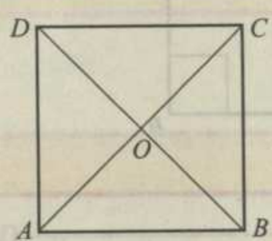
مربع کے چاروں زاویے قائمہ ہوتے ہیں



ABCD ایک مربع ہے۔ A، B، C اور D زاویوں کی پروٹریکٹر کی مدد سے پیمائش کیجیے۔ تو ہمیں پتا چلتا ہے۔

$$m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = 90^o$$

مربع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں



مشکل میں ABCD ایک مربع لیجیے۔ اس کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ نقطہ 'O' پر قطع کرتے ہیں۔ پیمائش سے پتا چلتا ہے کہ

$m\overline{OA} = m\overline{OC} = 1.9$ سینٹی میٹر اور

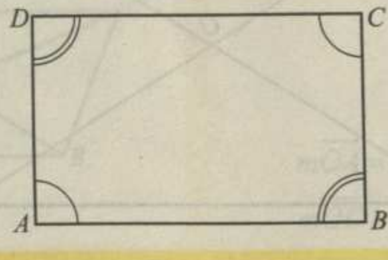
$m\overline{OB} = m\overline{OD} = 1.9$ سینٹی میٹر

7.5.2 مستطیل کے مخالف اضلاع مساوی ہوتے ہیں Opposite Sides of a Rectangle are Equal

شکل میں ایک مستطیل ABCD دیکھیے۔ $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ اور $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ دو مخالف اضلاع کے جوڑے ہیں۔

پیمائش سے ہمیں پتا چلتا ہے کہ

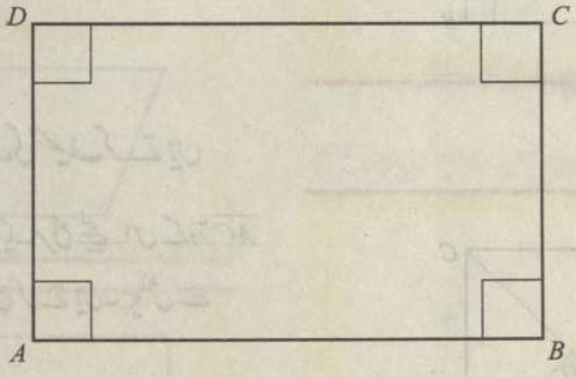
$m\overline{AD} = m\overline{BC} = 2.8$ سینٹی میٹر $\quad$ $m\overline{AB} = m\overline{CD} = 4.5$ سینٹی میٹر



مستطیل کے چاروں زاویے قائمہ ہوتے ہیں

ABCD ایک مستطیل ہے۔ زاویوں C, B, A اور D کی پروٹریکٹر کی مدد سے پیمائش کرنے پر پتا چلتا ہے کہ

$$m\angle A = m\angle B = m\angle C = m\angle D = 90^o$$

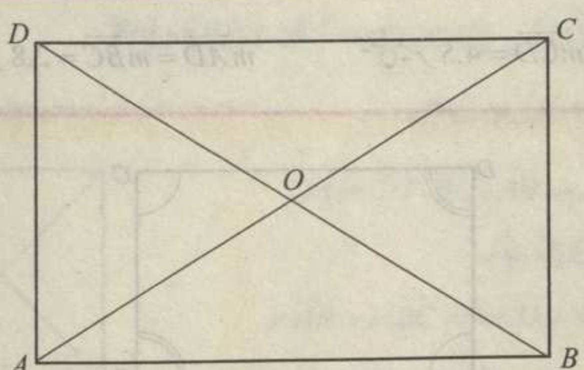


مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں

ABCD ایک مستطیل ہے۔ اس کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ نقطہ O پر کاٹتے ہیں۔

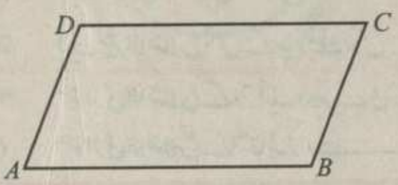
پیمائش سے ہمیں پتہ چلتا ہے کہ $m\overline{OA} = m\overline{OC} = 2.5$ سینٹی میٹر

اور $m\overline{OB} = m\overline{OD} = 2.5$ سینٹی میٹر



7.5.3 متوازی الاضلاع کے خواص Properties of a Parallelogram

◀ متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔



متوازی الاضلاع $ABCD$ میں $\overline{AB}, \overline{CD}$ اور

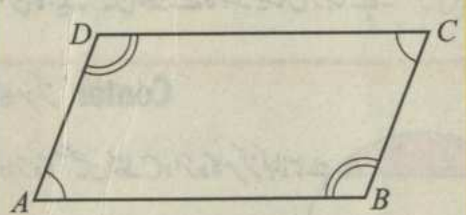
$\overline{AD}, \overline{BC}$ مخالف اضلاع کے جوڑے ہیں۔

پیمائش کرنے سے پتا چلتا ہے کہ

$m\overline{AB} = m\overline{CD} = 3.9$ سینٹی میٹر اور

$m\overline{AD} = m\overline{BC} = 2.0$ سینٹی میٹر

◀ متوازی الاضلاع کے متقابلہ زاویے مساوی ہوتے ہیں۔



$ABCD$ متوازی اضلاع ہے اور مخالف زاویوں

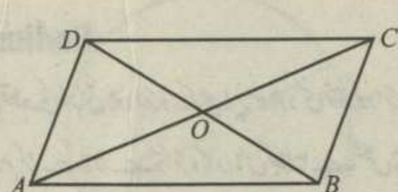
$\angle A, \angle C$ اور $\angle B, \angle D$ کے جوڑے ہیں۔

پیمائش کرنے سے ہمیں پتا چلتا ہے کہ

$m\angle A = m\angle C = 70^o$ اور

$m\angle B = m\angle D = 110^o$

◀ متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔



$ABCD$ متوازی الاضلاع کے وتر $\overline{AC}$ اور $\overline{BD}$ ایک

دوسرے کو نقطہ O قطع کرتے ہیں۔

پیمائش کرنے سے پتا چلتا ہے کہ

$m\overline{OA} = m\overline{OC} = 2.5$ سینٹی میٹر اور

$m\overline{OD} = m\overline{OB} = 2.5$ سینٹی میٹر

مشق 7.5

1- خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) ایک متوازی الاضلاع جس میں ایک زاویہ قائمہ ہو __________ کہلاتی ہے۔

(ii) ایک مساوی الاضلاع مستطیل __________ کہلاتی ہے۔

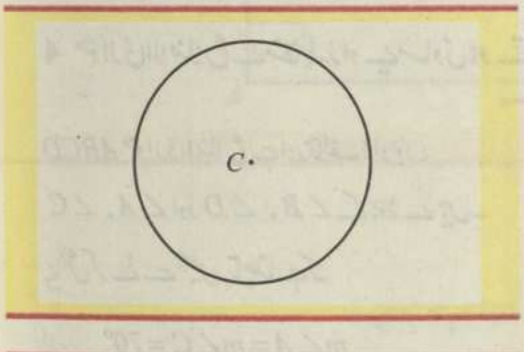
(iii) ایک کثیر الاضلاع جس کے چار ضلعے ہوں __________ کہلاتی ہے۔

(iv) متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی __________ کرتے ہیں۔

(v) متوازی الاضلاع کے متقابلہ زاویے __________ ہوتے ہیں۔

7.6 دائرہ CIRCLE

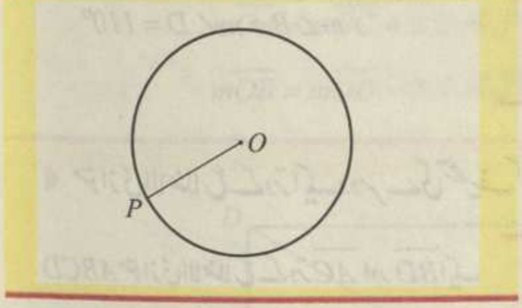
7.6.1 دائرہ Circle



دائرہ مستوی کے ان نقاط کا سیٹ ہوتا ہے۔
جن کا ایک متعین نقطہ سے فاصلہ یکساں رہتا ہے۔

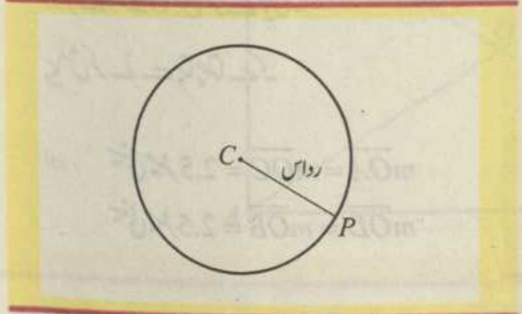
دائرہ کا مرکز Center

دائرہ کا متعین نقطہ C دائرہ کا مرکز کہلاتا ہے۔



رداسی قطعہ Radial Segment

دائرہ کے محیط پر P ایک نقطہ ہے۔ دائرہ کا مرکز O ہے تو $\overline{OP}$ دائرہ کا رداسی قطعہ کہلاتا ہے۔

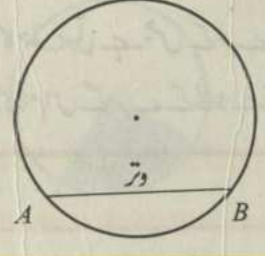


رداس Radius

اس قطعہ کی لمبائی جو دائرہ کے محیط پر موجود کسی نقطہ کو دائرہ کے مرکز سے ملاتا ہے۔ دائرہ کا رداس کہلاتا ہے۔ شکل میں $m\overline{CP}$ دائرہ کا رداس ہے۔ عام طور پر اسے 'r' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

وتر Chord

کوئی بھی قطعہ جو دائرہ کے دو نقاط کو ملائے دائرہ کا وتر کہلاتا ہے۔ شکل میں $\overline{AB}$ ایک وتر ہے۔



دائرہ کا قطعہ Segment of a Circle

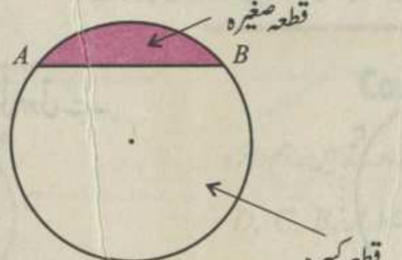
دائرہ کا وتر دائرے کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ یہ حصے دائرے کا قطعات کہلاتے ہیں۔

قطعہ صغیرہ Minor Segment

قوس صغیرہ اور وتر کے درمیانی حصہ کو دائرہ کا قطعہ صغیرہ کہتے ہیں۔

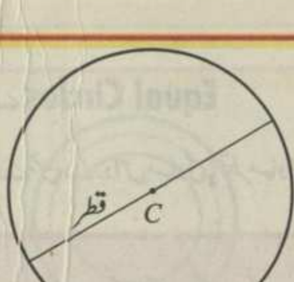
قطعہ کبیرہ Major Segment

قوس کبیرہ اور وتر کے درمیانی حصہ کو دائرہ کا قطعہ کبیرہ کہتے ہیں۔



قطر Diameter

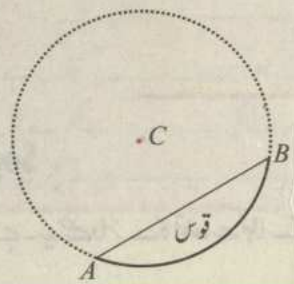
ایسا وتر جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرے دائرہ کا قطر کہلاتا ہے۔ کسی دائرے کے قطر کی لمبائی اس کے رداس کا دوگنا ہوتی ہے۔



قطر = 2 × رداس

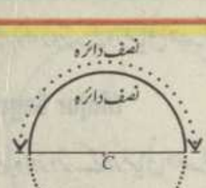
قوس Arc

قوس دائرہ کا حصہ ہوتی ہے۔ جس کے سرے دائرہ پر ہوتے ہیں اور درمیانی حصہ دائرہ کے نقاط کا سیٹ ہوتی ہے۔
قوس صغیرہ کا نام اس کے سرے کے نقاط سے ظاہر کیا جاتا ہے جیسا کہ قوس AB کو $(\widehat{AB})$ شکل میں لکھا گیا ہے۔



نصف دائرہ Semi Circle

ایک نصف دائرہ جو ایک دائرہ کا آدھا ہوتا ہے نصف دائرہ کہلاتا ہے۔

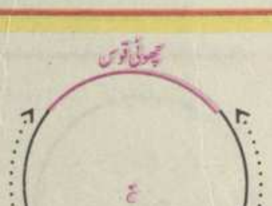


قوس صغیرہ Minor Arc

قوس صغیرہ نصف دائرے سے چھوٹی ہوتی ہے۔

قوس کبیرہ Major Arc

ایسی قوس جو نصف دائرہ سے بڑی ہو قوس کبیرہ کہلاتی ہے۔

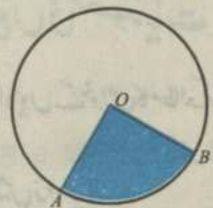


مساوی دائرے Equal Circles

ایسے دائرے جن کے رداس مساوی یا قطر مساوی ہوں مساوی دائرے کہلاتے ہیں۔

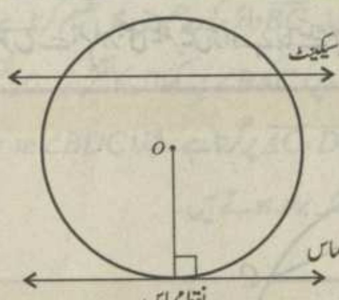
> کسی ایک مرکز اور ایک رداس سے ایک اور صرف ایک دائرہ بنایا جا سکتا ہے۔

Sector سیکٹر 7.6.2



دائرہ کے کوئی دو رداسی قطعات اور ان کے متعلقہ قوس سے گھرا ہوا دائرہ کا علاقہ، دائرہ کا سیکٹر کہلاتا ہے۔ شکل میں AOB علاقہ، O مرکز کے ساتھ دائرہ کا سیکٹر کہلاتا ہے۔

Secant Line خط قاطع



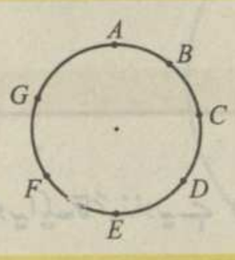
ایسا خط مستقیم جو دائرہ کو اس کے دو نقاط پر قطع کرے دائرہ کا خط قاطع کہلاتا ہے۔

Tangent مماس

مماس ایسا خط ہوتا ہے جو دائرے کے رداس کے بیرونی نقطہ پر عمود ہوتا ہے۔

دائرہ کا وہ نقطہ جہاں رداس اور مماس آپس میں ملتے ہیں نقطہ تماس کہلاتا ہے۔

Concyclic Points ہم دائرہ نقاط



وہ تمام نقاط جو دائرہ کے محیط پر واقع ہوتے ہیں۔ ہم دائرہ نقاط کہلاتے ہیں، دی گئی شکل میں نقاط D, C, B, A $F, E,$ اور G سب ہم دائرہ نقاط ہیں۔

Concentric Circles ہم مرکز دائرے

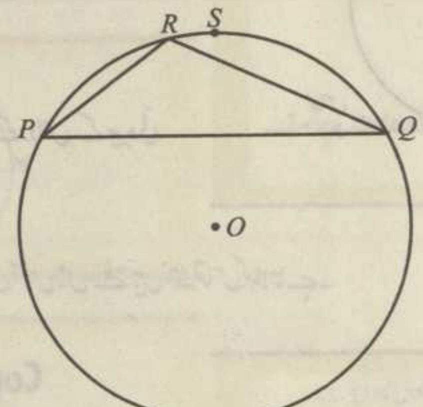
ایسے ہم مستوی دائرے جو ہم مرکز ہوں اور جن کے رداس مختلف ہوں۔ ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں، تین ہم مرکز دائروں کا سیٹ شکل میں دکھایا گیا ہے۔

7.6.3 زاویوں کی خصوصیات Properties of Angles

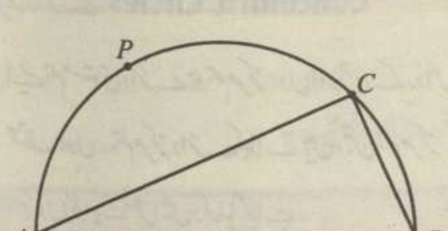
دائروں میں زاویوں کے خواص کا مطالعہ کرنے کے لیے سب سے پہلے دائرے کے قطع میں زاویہ کو سمجھنا ضروری ہے۔

دائرے کے قطعہ میں زاویہ:

'O' مرکز والے دائرہ کا قاطع $\overline{PQ}$ ہے جو کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔ O مرکز والے دائرہ کا قطعہ PSQ لیتے ہیں اس پر R کوئی نقطہ لے کر P اور Q سے R کو ملاتے ہیں اور $\angle PRQ$ بنتا ہے۔ اس طرح $\angle PRQ$، قطعہ PSQ کا زاویہ کہلاتا ہے۔ اس طرح سے ہم اور بھی سیکٹر میں زاویے بنا سکتے ہیں۔



نصف دائرہ کا زاویہ ایک قائمہ زاویہ ہے Angle in a Semi-Circle is a Right Angle



1- کوئی قطعہ خط AB لیکر اس کا وسطی نقطہ O لیا۔

2- $\overline{AB}$ پر $\overline{OA}$ رداس کا نصف دائرہ لگایا۔

3- نصف دائرہ پر کوئی نقطہ C لیا۔ C کو A اور R سے ملایا۔ پس $\angle ACB$ نصف دائرہ زاویہ ہے۔

4- پروٹریکٹر کے مرکز کو C پر رکھا اور $\overline{AC}$ پر اس کی لائن کو رکھا۔

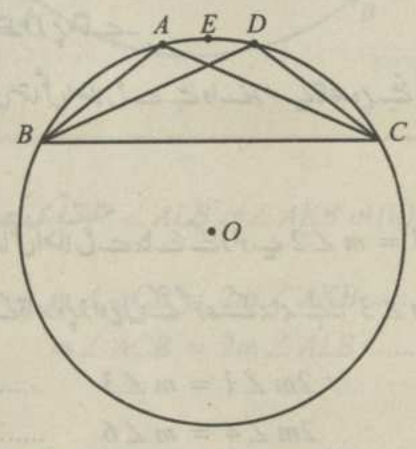
ہمیں پتا چلتا ہے $\angle ACB$ کی مقدار $90°$ ہے۔ یعنی زاویہ قائمہ

پس نصف دائرہ میں زاویہ کی مقدار $90°$ ہوتی ہے۔ یعنی نصف دائرہ میں زاویہ قائمہ بنتا ہے۔ $m\angle ACB = 90°$

ایک ہی قطعہ میں بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں

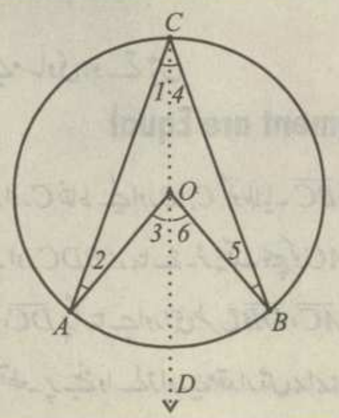
Angles in the Same Segment are Equal

'O' کو مرکز مان کر دائرہ لگایا۔ دائرہ پر B اور C نقاط لیے اور B, C کو ملایا۔ $\overline{BC}$ دائرہ کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ اسی ایک ہی دائرہ کے قطعہ میں زاویے $\angle BAC$ اور $\angle BDC$ بنائے۔ ٹریسنگ پیپر کو $\angle BAC$ پر رکھا اس کا نقش لیا۔ اس نقش کو $\angle BDC$ پر رکھا۔ A، D پر رکھا تو $\overline{AB}$، $\overline{DC}$ پر گرتا ہے اور اسی طرح $\overline{DB}$، $\overline{AC}$ پر گرتا ہے۔ لہٰذا $m\angle BAC = m\angle BDC$ جس سے پتا چلتا ہے۔ دائرہ کے ایک ہی قطعہ پر بننے والے زاویے مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔



مرکزی زاویہ Central Angle

قوس صغیرہ کا مرکزی زاویہ متعلقہ قوس کبیرہ کے محصور زاویہ کا دوگنا ہوتا ہے۔



شکل (i)

شکل (i) میں $\angle AOB$ قوس صغیرہ $\widehat{AB}$ کا مرکزی زاویہ ہے جبکہ $\angle ACB$ قوس کبیرہ $\widehat{ACB}$ کا محصور زاویہ ہے۔

C کو O سے ملا کر بڑھایا جو دائرہ کو نقطہ D پر ملتا ہے۔

قاعدہ $\widehat{AC}$ پر مثلث $\angle ABC$ کی متماثل اضلاع سے بننے والے زاویے قاعدہ پر بننے والے زاویوں کا مجموعہ مخالف بیرونی زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔

قاعدہ AC پر مثلث AOC کے متماثل اضلاع سے بنائے گئے زاویے $m\angle 1 = m\angle 2$

مثلث کا مخالف بیرونی زاویہ اس کے قاعدہ پر زاویوں کے مجموعہ کے برابر ہے۔ $m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 3$

$$\therefore 2m\angle 1 = m\angle 3 \quad \text{...........}(i)$$

اسی طرح $2m\angle 4 = m\angle 6 \quad \text{...........}(ii)$

$\therefore$ (i) اور (ii) کو جمع کرنے سے

$$2m\angle 1 + 2m\angle 4 = m\angle 3 + m\angle 6$$

$$2(m\angle 1 + m\angle 4) = m\angle 3 + m\angle 6$$

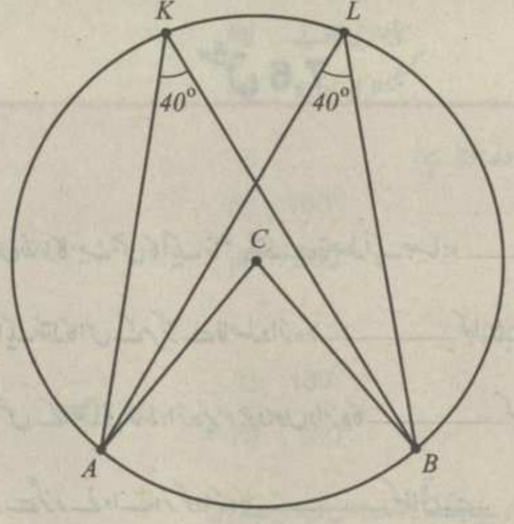
$$2m\angle ABC = m\angle AOB$$

یا $m\angle AOB = 2m\angle ACB$

7.6.4 اطلاق Applications

ایک ہی قوس میں بننے والے تمام زاویے مقدار میں برابر ہوتے ہیں۔

$$m\angle K = m\angle L = 40^o$$



شکل (ii)

$\angle ACB$ مرکزی زاویہ ہے شکل (ii) اور $\angle AKB$ اور $\angle ALB$ متعلقہ قوس کبیرہ کے محصور زاویے ہیں۔

$$\therefore m\angle ACB = 2m\angle AKB \text{ ....}(i)$$

اور $$m\angle ACB = 2m\angle ALB \text{ ....}(ii)$$

$\therefore$ (i) اور (ii) کی رو سے

$$2m\angle AKB = 2m\angle ALB$$

$$m\angle AKB = m\angle ALB$$

پس ایک ہی قوس پر بننے والے زاویے برابر ہوتے ہیں۔

یادرکھیے:

اگر متماثل دائروں یا ایک ہی دائرہ میں اگر دو چھوٹی قوسیں متماثل ہوں تب ان کی بڑی قوسوں سے بننے والے متناظرہ زاویے بھی متماثل ہوتے ہیں۔

مشق 7.6

1- خالی جگہ پر کیجیے۔

(i) ایک مستوی میں نقاط کا سیٹ جن کا ایک خاص نقطہ سے فاصلہ ایک جیسا ہو _______ کہلاتا ہے۔

(ii) دائرہ پر موجود ایک نقطہ کا اس کے مرکز سے فاصلہ دائرہ کا _______ کہلاتا ہے۔

(iii) ایک قطعہ خط جس کے اختتامی نقاط دائرہ پر موجود ہوں دائرہ کا _______ کہلاتا ہے۔

(iv) دائرہ کے مرکز سے گزرنے والے وتر کو دائرہ کا _______ کہلاتی ہے۔

(v) دائرہ کا نصف _______ کہلاتا ہے۔

(vi) نصف دائرہ سے بڑی قوس کو _______ کہتے ہیں۔

(vii) ایک دیے گئے مرکز اور ایک دیے گئے _______ سے ایک اور صرف ایک دائرہ بنا سکتے ہیں۔

(viii) قوس اور دو رداسی قطعات سے گھرا ہوا علاقہ _______ کہلاتا ہے۔

(ix) ایک سیدھا خط جو دائرہ کو دو نقاط پر قطع کرے _______ کہلاتا ہے۔

(x) نصف دائرہ میں زاویہ _______ ہوتا ہے۔

جائزہ مشق 7

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگایئے۔

1. ایسا زاویہ جس کی مقدار 180° سے زائد مگر 360° سے کم ہو کہلاتا ہے:

(a) عکس زاویہ (b) منفرجہ زاویہ
(c) زاویہ مستقیم (d) حادہ زاویہ

2. ایسے دو زاویے جن میں مشترک راس اور ایک بازو مشترک ہو کہلاتے ہیں:

(a) راسی زاویے (b) سپلیمنٹری زاویے
(c) متصلہ زاویے (d) کمپلیمنٹری زاویے

3. مثلث کے زاویوں کا مجموعہ ہوتا ہے:

(a) 90° (b) 180°
(c) 270° (d) 360°

4. زاویہ مستقیم کا درجہ ہوتا ہے:

(a) 90° (b) 180°
(c) 270° (d) 360°

5. اگر دو زاویے ایک ہی زاویے کے سپلیمنٹ ہوں تو وہ ہوتے ہیں

(a) مساوی (b) غیر مساوی
(c) متصلہ زاویے (d) متبادلہ زاویے

6. ایسی مثلث جس کا کوئی ضلع بھی برابر نہ ہو، کہلاتی ہے:

(a) متساوی الساقین مثلث (b) مساوی الاضلاع مثلث
(c) مختلف اضلاع مثلث (d) قائمۃ الزاویہ مثلث

7. ایسی مثلث جس کے تینوں زاویے حادہ ہوں، کہلاتی ہے:

(a) حادۃ الزاویہ مثلث (b) قائمۃ الزاویہ مثلث
(c) زاویہ مستقیم (d) حادہ زاویہ

8. ایسی کثیر الاضلاع جس کے چاروں اضلاع مساوی ہوں کہلاتی ہے:

(a) کثیر الاضلاع (b) متوازی الاضلاع
(c) مربع (d) مستطیل

9. نصف دائرہ سے بڑی قوس کہلاتی ہے:

(a) قوس صغیرہ (b) وتر
(c) قوس کبیرہ (d) قطر

10. مساوی رداس یا قطر والے دائرے کہلاتے ہیں:

(a) ہم مرکز دائرے (b) نصف دائرے
(c) متماثل دائرے (d) ہم دائرے نقاط

II- خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. دو زاویے جن کا مشترک راس اور ایک بازو مشترک ہو ________ کہلاتے ہیں۔

2. اگر دو زاویوں کا مجموعہ، زاویہ مستقیم ہو تو زاویے کہلاتے ہیں ________

3. زاویہ جن کی مقدار 90° سے زائد اور 180° سے کم ہو، کہلاتا ہے ________

4. دو غیر متصلہ زاویے جن میں ہر ایک کی مقدار زاویہ مستقیم سے کم ہو ________ کہلاتے ہیں۔

5. مثلث کے زاویوں کا مجموعہ ________ ہوتا ہے۔

6. دو لائنیں جو تیسری لائن کے متوازی ہوں تو وہ ________ متوازی ہوتی ہیں۔

7. دو ہندسی اشکال جو جسامت میں مساوی اور شکل میں یکساں ہوں ________ ہوتی ہیں۔

8. ایک مثلث جس کا کوئی ضلع بھی آپس میں برابر نہ ہو ________ ہوتی ہیں۔

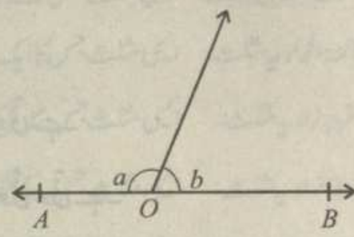
9. وتر جو دائرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہو ________ کہلاتا ہے۔

10. نصف دائرہ میں بننے والا زاویہ ________ ہوتا ہے۔

خط مستقیم پر متصل زاویے

دیا گیا ہے کہ $m\angle a + m\angle b = 180^o$

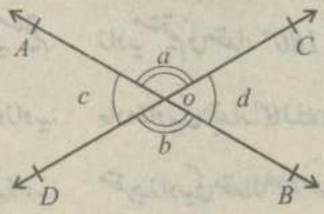
تو $\overline{AOB}$ ایک خط مستقیم ہے۔



راسی زاویے

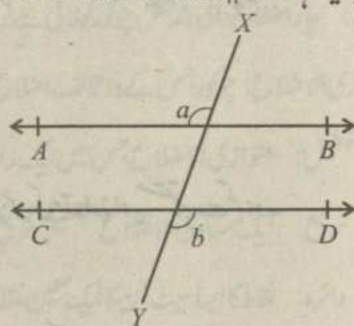
معلوم ہے کہ $m\angle a = m\angle b$ اور $m\angle c = m\angle d$ ہے

تو $\overline{AOB}$ اور $\overline{DOC}$ خطوط مستقیم ہیں۔

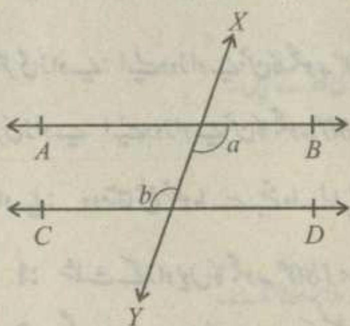


متوازی خطوط کے ساتھ بننے والے زاویے

دیا گیا ہے $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ تو $m\angle a = m\angle b$

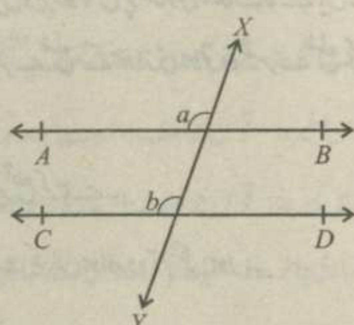


دیا گیا ہے $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ تو $m\angle a = m\angle b$



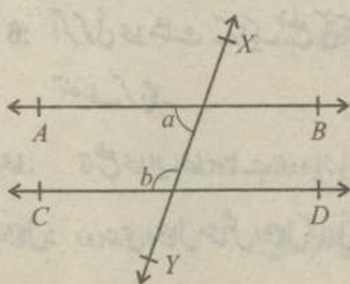
متبادلہ زاویے

دیا گیا ہے $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ تو $m\angle a = m\angle b$



اندرونی زاویے

دیا گیا ہے $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ تو $m\angle a + m\angle b = 180^o$



خلاصہ SUMMARY

زاویہ: زاویہ دو ایسی شعاعوں کا اتصال (یونین) ہوتا ہے جس کا نقطہ آغاز مشترک ہو۔

قائمہ زاویہ: قائمہ زاویہ ایسا زاویہ ہوتا ہے جس کی مقدار 90^o ہو۔

زاویہ مستقیم: زاویہ مستقیم کی مقدار 180^o ہوتی ہے۔

حادہ زاویہ: حادہ زاویہ کی مقدار 0^o سے بڑی اور 90^o سے چھوٹی ہوتی ہے۔

منفرجہ زاویہ: منفرجہ زاویہ کی مقدار 90^o سے بڑی اور 180^o سے چھوٹی ہوتی ہے۔

عکسی زاویہ: عکس زاویہ کی مقدار 180^o سے بڑی اور 360^o سے کم ہوتی ہے۔

مساوی زاویے: مساوی زاویوں کی مقداریں مساوی ہوتی ہیں۔

متصلہ زاویے: دو ایسے زاویے جن کا راست مشترک اور ایک بازو مشترک ہو، متصلہ زاویے کہلاتے ہیں۔

کمپلیمنٹری زاویے: ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ 90^o ہو۔

سپلیمنٹری زاویے: ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ 180^o ہو۔

راسی زاویے: دو متقاطع خطوط سے بننے والے ایسے غیر متصلہ زاویے جن کی مقدار زاویہ مستقیم سے کم ہو۔

نتائج: **1:** مثلث کے زاویوں کا مجموعہ 180^o ہوتا ہے۔

2: اگر دو زاویے مساوی زاویوں کے کمپلیمنٹ ہوں تو وہ آپس میں بھی مساوی ہوتے ہیں۔

3: اگر دو زاویے، دو مساوی زاویوں کے سپلیمنٹ ہوں تو وہ آپس میں بھی مساوی ہوتے ہیں۔

4: دو خطوط تیسرے خط کے متوازی ہوں تو وہ آپس میں بھی متوازی ہوتے ہیں۔

5: اگر تین متوازی خطوط کسی خط قاطع پر مساوی قطعات قطع کریں تو ہر خط قاطع پر مساوی قطعات کاٹتے ہیں۔

6: اگر کوئی خط مثلث کے ایک ضلع کی تنصیف کرے اور دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی بھی تنصیف کریگا۔

قاطع خط: قاطع خط ایسا خط ہوتا ہے جو دو یا زیادہ خطوط کو مختلف نقاط پر قطع کرتا ہے۔

متماثل اشکال: دو ہندسی اشکال متماثل اشکال کہلاتی ہیں اگر ان کی جسامت یکساں ہو اور وہ ہم شکل ہوں۔

کثیرالاضلاعی: مستوی پر ایک ایسی بند شکل جو تین یا زیادہ اضلاع پر مشتمل ہو۔

متساوی الساقین مثلث: ایسی مثلث جس کے دو اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

مختلف اضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے دو اضلاع مساوی نہ ہو۔

قائمۃ الزاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو۔

منفرجہ زاویہ مثلث: ایسی مثلث جس میں ایک زاویہ منفرجہ (90^o سے بڑا) ہو۔

حادۃ الزاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں زاویے حادہ (90^o سے کم) ہوں۔

مساوی الاضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع لمبائی میں مساوی ہوں۔

دو مثلثان کے متماثل ہونے کی صورتیں

(i) ض ض ض ≅ ض ض ض (ii) ض زض ≅ ض زض (iii) زض ز ≅ زض ز (iv) آر ایچ ایس ≅ آر ایچ ایس

چوکور: چار اضلاع والی بند شکل چوکور کہلاتی ہے۔

متوازی الاضلاع: چوکور جس کے دو مخالف اضلاع کے جوڑے متوازی ہوتے ہیں۔

مستطیل: متوازی الاضلاع جس میں ایک زاویہ قائمہ ہو۔

مربع: ایک مساوی الاضلاع مستطیل مربع کہلاتی ہے۔

دائرہ: نقاط کا ایسا سیٹ جن کا ایک معین نقطہ سے فاصلہ برابر ہو، دائرہ بناتا ہے۔

رداس: اس قطعہ کی لمبائی جو دائرے کے مرکز کو اس کے کسی نقطہ سے ملائے۔

قطر: اس وتر کی لمبائی جو دائرے کے مرکز میں سے گزرے، قطر کہلاتی ہے۔

قوس: دائرے کا وہ حصہ جس کے سرے اور درمیانی نقاط دائرے پر واقع ہوں، دائرہ کی قوس کہلاتا ہے۔

نصف دائرہ: قوس جو دائرے کے نصف پر مشتمل ہو، نصف دائرہ کہلاتی ہے۔

قوس صغیرہ: قوس جو نصف دائرہ سے کم ہو، قوس صغیرہ کہلاتی ہے۔

قوس کبیرہ: قوس جو نصف دائرہ سے بڑی ہو، قوس کبیرہ کہلاتی ہے۔

مساوی دائرے: ایسے دائرے جن کے مساوی رداس ہوں یا مساوی قطر ہوں۔

قاطع خط: ایسا خط جو دائرہ کو دو مختلف نقاط پر قطع کرے۔

مماس: ایسا خط، جو دائرے کے رداس کو اس کے بیرونی سرے پر عمود ہو۔

سیکٹر: دائرہ کا وہ علاقہ جو دائرہ کی قوس اور اس کے سروں کو ملانے والے رداسی قطعات کے اندر گھرا ہوا ہو۔

ہم مرکز دائرے: ایسے ہم مستوی دائرے جن کا مرکز مشترک نقطہ ہو لیکن ان کے رداس مختلف ہوں۔

مرکزی زاویہ: کسی قوس صغیرہ کا مرکز پر بننے والا زاویہ، مرکزی زاویہ کہلاتا ہے۔

ہم دائرہ نقاط: دائرہ کے محیط پر واقع نقاط کو ہم دائرہ نقاط کہتے ہیں۔

نتائج: (1) نصف دائرہ کا محصور زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

(2) دائرے کے ایک ہی قطعہ میں بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

(3) ایک ہی قوس میں محصور زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

یونٹ 8

عملی جیومیٹری PRACTICAL GEOMETRY

- مثلث بنانا
- چوکور بنانا
- دائرہ کا مماس

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ایسی مثلث بنائیں جس کی معلوم ہوں
  - دو اضلاع اور درمیانی زاویہ
  - دو زاویے اور ایک ضلع
  - اس کے دو اضلاع اور کسی ایک ضلع کے مخالف زاویہ (تینوں ممکنات)
- بنا سکیں۔
  - مثلث کے زاویوں کے ناصف
  - مثلث کے ارتفاع
  - مثلث کے وسطانیے اور ان کا ایک نقطہ پر ملنا
- مستطیل بنا سکیں جبکہ
  - دو اضلاع معلوم ہوں
  - وتر اور کوئی ایک ضلع معلوم ہو
- مربع بنا سکیں جبکہ اس کا وتر معلوم ہو
- متوازی الاضلاع بنا سکیں جبکہ اس کے متصلہ اضلاع اور درمیانی زاویہ معلوم ہو۔
- دیے گئے دائرے کے مرکز کا تعین کر سکیں
- تین غیر ہم خط نقاط میں سے دائرہ کھینچ سکیں۔
- کسی نقطہ P سے دائرہ کا مماس کھینچ سکیں۔
  - جب P دائرہ پر واقع ہو۔
  - جب P دائرہ سے باہر واقع ہو۔
- بنا سکیں
  - مشترک راست مماس یا مشترکہ بیرونی مماس
  - دو مساوی دائروں کے مشترک معکوس یا اندرونی مماس
- مماس کھینچ سکیں
  - دو غیر مساوی مس کرتے ہوئے دائروں پر
  - دو غیر مساوی متقاطع دائروں پر

8.1 مثلث بنانا CONSTRUCTION OF A TRIANGLE

جب ہمیں کوئی شکل بنانا مقصود ہو تو ہم آلات جیومیٹری استعمال کرتے ہیں جن کے نام پیمانہ، پرکار وغیرہ ہیں۔

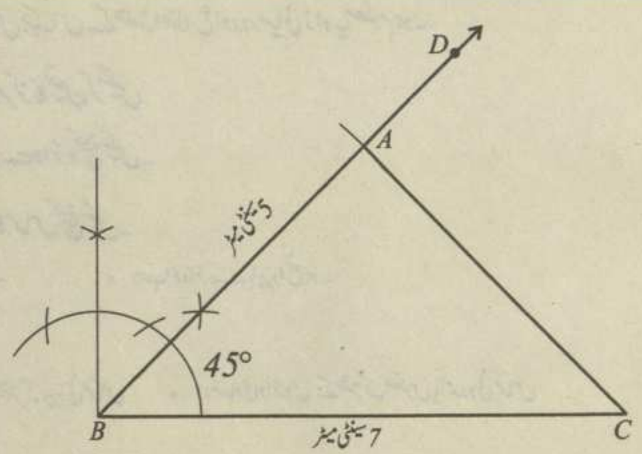
8.1.1 بناوٹ Construction

- مثلث بنانا جبکہ اس کے دو اضلاع اور درمیانی زاویہ معلوم ہوں۔

فرض کیا مطلوبہ مثلث کے اضلاع 7 سینٹی میٹر اور 5 سینٹی میٹر اور ان کا درمیانی زاویہ $45°$ ہے۔

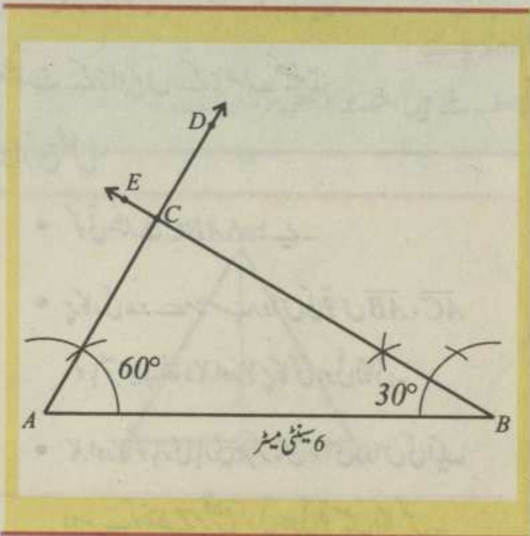
مدارج عمل:

- کوئی سا قطعہ خط $m\overline{BC} =$ 7 سینٹی میٹر کھینچا۔
- نقطہ B پر زاویہ $m\angle DBC = 45°$ کھینچا۔
- B کو مرکز مان کر $\overline{BD}$ کو نقطہ A پر کاٹتی ہوئی قوس لگائی۔
- A کو C سے ملایا۔
- ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔



◀ مثلث بنانا جبکہ دوزاویے اوران کا درمیانی ضلع معلوم ہو۔

فرض کیا کہ دوزاویے $m\angle A = 60^\circ$ اور $m\angle B = 30^\circ$ ہیں۔ اور درمیانی ضلع $m\overline{AB} =$ 6 سینٹی میٹر ہے۔

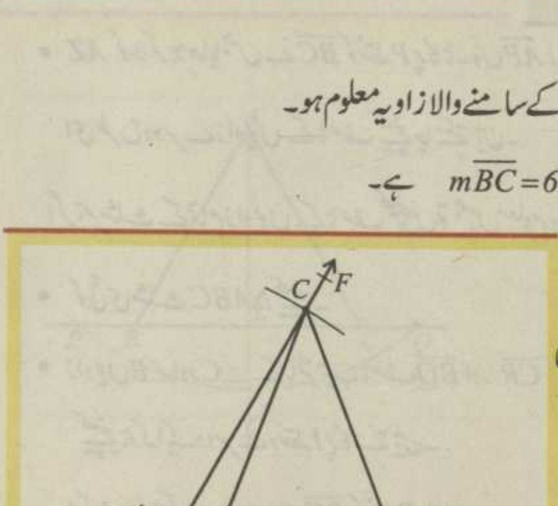


مدارج عمل:

- کوئی سا قطعہ خط 6 سینٹی میٹر $= AB$ کھینچا۔
- پرکار کی مدد سے نقطہ A پر زاویہ $m\angle BAD = 60^\circ$ کھینچا۔
- پرکار کی مدد سے نقطہ B پر زاویہ $m\angle EBA = 30^\circ$ کھینچا۔
- $\overrightarrow{AD}$ اور $\overrightarrow{BE}$ دونوں آپس میں نقطہ C پر قطع کرتے ہیں۔
- ΔABC مطلوبہ مثلث ہے۔

◀ مثلث بنانا جبکہ اس کے دو اضلاع اور کسی ایک ضلع کے سامنے والا زاویہ معلوم ہو۔

فرض کیا کہ $m\overline{BC} = 6.5cm$, $m\overline{AC} = 7cm$, $m\angle A = 60$ ہے۔



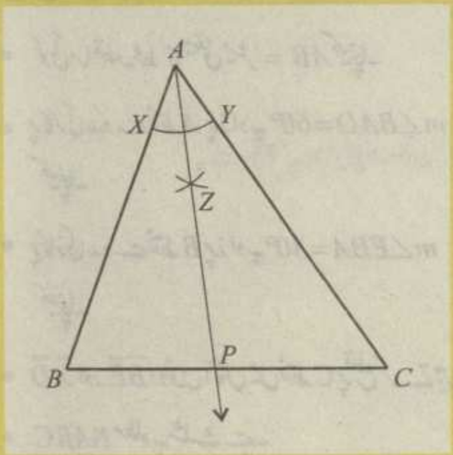
مدارج عمل:

- کسی خط AG پر زاویہ $m\angle GAF = 60^\circ$ پرکار کی مدد سے کھینچا۔
- $\overrightarrow{AF}$ پر پرکار کی مدد سے 7 سینٹی میٹر $= m\overline{AC}$ قطع کیا۔
- نقطہ C کو مرکز مان کر پرکار کی مدد سے $\overleftrightarrow{AG}$ پر ایک قوس $B'B$ لگائی
- C کو B' اور B سے کو ملایا۔

ΔCAB اور $\Delta CAB'$ دو مطلوبہ مثلثان ہیں۔

8.1.2　مثلث کے زاویوں کے ناصف　Angle Bisectors of a Triangle

کسی مثلث کے زاویہ کا ناصف اس زاویہ کو تنصیف کرتا ہے اور سامنے والے ضلع کو ملتا ہے۔ صاف ظاہر ہے کہ یہ مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ہوتے ہیں۔



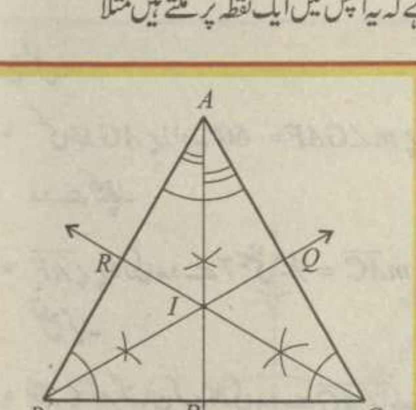
مثلث کے زاویوں کے ناصف کھینچنا:

مدارج عمل:

- کوئی مثلث ΔABC بنایے۔
- پرکار کی مدد سے مناسب رداس کی قوس $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ کو بالترتیب نقاط X اور Y پر کاٹتی ہوئی لگائی۔
- X اور Y کو باری باری مرکز مان کر اسی رداس کی ایک دوسرے کو نقطہ Z پر قطع کرتی ہوئی قوسیں لگائیں۔
- AZ کو ملا کر بڑھایا جس نے $\overline{BC}$ کو نقطہ P پر کاٹا۔ پس $\overline{AP}$ زاویہ A کا مطلوبہ ناصف ہے۔

اسی طرح دوسرے زاویوں کے ناصف کھینچے جا سکتے ہیں۔

اگر ہم مثلث کے تمام زاویوں کے ناصف کھینچیں تو ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ یہ آپس میں ایک نقطہ پر ملتے ہیں مثلاً



- کوئی سی مثلث ΔABC کھینچیے۔
- زاویوں $\angle B$ اور $\angle C$ کے بالترتیب ناصف $\overline{BQ}$ اور $\overline{CR}$ کھینچیے جو کہ ایک دوسرے کو نقطہ I پر کاٹتے ہیں۔

A کو I سے ملا کر بڑھایے۔ جو $\overline{BC}$ کو نقطہ P ملا۔

$\angle BAP$ اور $\angle CAP$ کی پروٹریکٹر کی مدد سے پیمائش کی۔

ہمیں پتا چلا کہ $m\angle BAP = m\angle CAP$

جس سے ظاہر ہوا کہ $\overline{AP}$ مثلث ABC کے تیسرے زاویے کا ناصف ہے۔

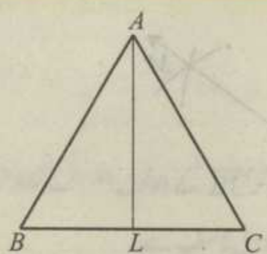
ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ دو زاویوں کے ناصفوں کا نقطہ تقاطع تیسرے زاویے کے ناصف پر بھی واقع ہے۔

مثلث کے زاویوں کے ناصف باہم ایک نقطہ پر مرتکز ہوتے ہیں۔
یعنی وہ ایک ہی نقطہ پر ملتے ہیں۔

ہمیں علم ہونا چاہیے

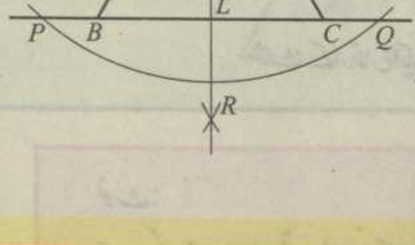
وہ نقطہ جہاں مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ملتے ہیں، مثلث کا محصور مرکز کہلاتا ہے۔

مثلث کے ارتفاع Altitudes of a Triangle



مثلث کا ارتفاع اس کے کسی راس سے مخالف ضلع پر عمود ہوتا ہے۔ واضح رہے کہ کسی مثلث کے تین ارتفاع ہوتے ہیں۔ ہر ایک راس سے مخالف ضلع پر عمود۔

مثلث کے ارتفاع کھینچنا



مدارج عمل:

- کوئی سی بھی مثلث ABC کھینچیے۔
- A کو مرکز مان کر مناسب رداس کی قوس اس طرح لگایے جو BC کو دو نقاط P اور Q پر کاٹے۔
- $\overline{PQ}$ کے نصف سے زیادہ رداس کی P اور Q کو باری باری مرکز مان کر آپس میں نقطہ R پر قطع کرتی ہوئی قوسیں لگائیں۔
- نقطہ A کو R سے ملایا۔ جس نے $\overline{BC}$ کو L پر کاٹا پس $\overline{AL}$ مطلوبہ ارتفاع ہے۔
- اسی طرح دوسرے ارتفاع کھینچے جا سکتے ہیں۔

ہم نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ مثلث کے تینوں ارتفاع ایک نقطہ میں گزرتے ہیں۔ (بڑھانے پر اگر ضروری ہو) مثلاً

- کوئی مثلث ABC بنایئے۔

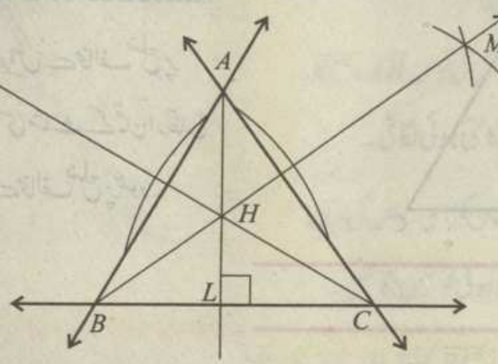
نقاط B اور C سے بالترتیب $\overline{BM}$ اور $\overline{CN}$ عمود گرائیے۔

فرض کیا $\overline{BM}$ اور $\overline{CN}$ ایک نقطہ H پر ملتے ہیں (بڑھانے پر اگر ضرورت پڑے)۔

A کو H سے ملا کر بڑھایئے تا کہ وہ BC نقطہ L پر ملے۔

زاویہ ALC کی پیمائش کیجیے۔

ہمیں پتا چلتا ہے کہ $m\angle ALC = 90^o$ لہٰذا $\overline{AL}$ بھی مثلث ABC کا ارتفاع ہے۔



مثلث کے ارتفاع بھی ہم نقطہ ہوتے ہیں یعنی وہ ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

ہمیں علم ہونا چاہیے کہ

مثلث کے ارتفاع ایک نقطہ پر ملتے ہیں جو کہ مرکز ارتفاع کہلاتا ہے۔

نوٹ:

- کسی متساوی الساقین مثلث کے مساوی اضلاع پر گرائے گئے ارتفاع مساوی ہوتے ہیں۔
- متساوی الساقین مثلث کے قاعدہ پر ارتفاع اس کی تنصیف کرتا ہے۔
- مساوی الاضلاع کے ارتفاع مساوی ہوتے ہیں۔
- کسی مثلث کے ارتفاع ہم نقطہ ہوتے ہیں یعنی وہ ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

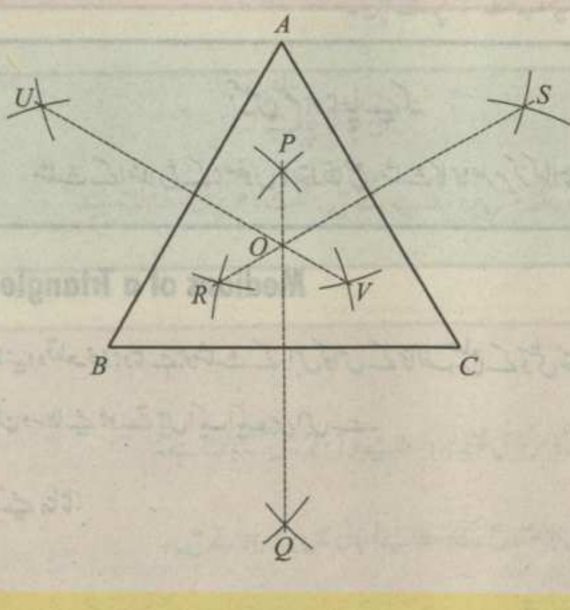
مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف Perpendicular Bisectors Of The Sides Of A Triangle

ایسا قطعہ خط جو کسی مثلث کے ضلع کی تنصیف کرے اور وہ اس ضلع پر عمود ہو تو وہ مثلث کے اس ضلع کا عمودی ناصف کہلاتا ہے۔ مثلث کے ہر ضلع پر عمودی ناصف ہوتا ہے۔ کسی مثلث کے تین اضلاع کے ہر ایک کے عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

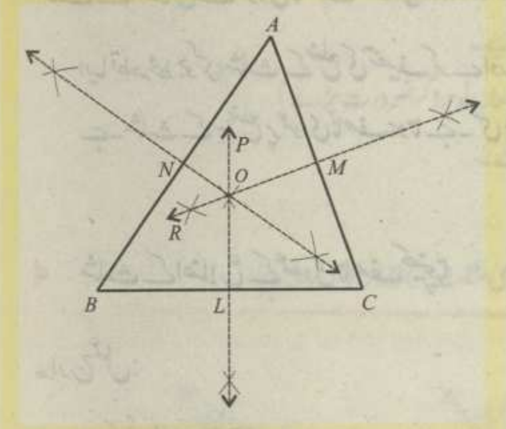
مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف کھینچنا

مدارج عمل:

- کوئی مثلث ABC بنایے۔
- $\overline{BC}$ کے نصف سے زائد مقدار کے رداس کی B اور C کو مراکز مان کر $\overline{BC}$ کے دونوں اطراف نقاط P اور Q پر قطع کرتی قوسیں لگایئے۔ P اور Q کو ملایئے پس $\overline{PQ}$، ضلع $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف ہے۔



- اسی طرح $\overline{AC}$ اور $\overline{AB}$ کے بالترتیب $\overline{UV}$ اور $\overline{RS}$ عمودی ناصف کھینچیے۔
- (اگر ضرورت ہو ان عمودی ناصفوں کو بڑھایے) یہ نقطہ O پر ملتے ہیں۔



ہم مشاہدہ کرتے ہیں یہ ایک نقطہ پر ملتے ہیں

- کوئی مثلث ABC بنایے۔
- اضلاع $\overline{BC}$ اور $\overline{AC}$ پر بالترتیب عمودی ناصف $\overline{PL}$ اور $\overline{RM}$ کھینچیے جو کہ نقطہ O پر کاٹتے ہیں۔ O سے عمود $\overline{ON}$ ، $\overline{AB}$ پر کھینچیے۔ ماپنے سے پتا چلتا ہے کہ $m\overline{AN} = m\overline{NB}$۔

پس $\overline{ON}$ عمودی ناصف ہے $\overline{AB}$ کا۔

پس مثلث ABC کے تینوں عمودی ناصف ایک ہی نقطہ O میں سے گزرتے ہیں۔

مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف ہم نقطہ ہوتے ہیں یعنی ایک نقطہ پر ملتے ہیں

ہمیں علم ہونا چاہیے کہ

مثلث کے اضلاع کے ناصفوں کا نقطہ تقاطع، مثلث کا محاصر مرکز کہلاتا ہے۔

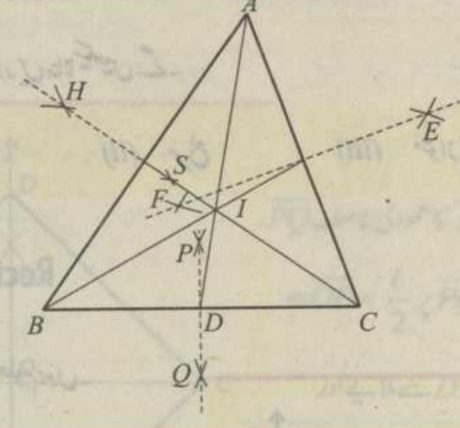
مثلث کے وسطانیے Medians of a Triangle

کسی مثلث کا وسطانیہ وہ قطعہ خط ہوتا ہے جو مثلث کے راس کو اس کے مخالف ضلع کے وسطی نقطہ سے ملاتا ہے۔ صاف ظاہر ہے کہ ہر مثلث کے تین وسطانیے ہوتے ہیں ایک ایک ہر راس سے۔

مثلث کے وسطانیے بنانا:

مدارج عمل:

- کوئی مثلث ABC بنایے۔
- $\overline{BC}$ کے نصف سے زائد کی پرکار کھول کر B کو مرکز مان کر $\overline{BC}$ کے دونوں طرف قوسیں لگایے اسی طرح C کو مرکز مان کر $\overline{BC}$ کے دونوں طرف اسی رداس کی قوسیں لگایے جو پہلی قوسوں کو بالترتیب نقاط P اور Q پر کاٹتی ہیں۔



- P اور Q کو ملایے جو $\overline{BC}$ پر نقطہ D میں گزرتا ہے، پس نقطہ D, $\overline{BC}$ کا وسطی نقطہ ہے۔
- A کو D سے ملایے پس $\overline{AD}$ مطلوبہ وسطانیہ ہے۔

اسی طرح B اور C سے وسطانیے کھینچیے۔

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ یہ سب نقطہ 'I' پر ملتے ہیں۔

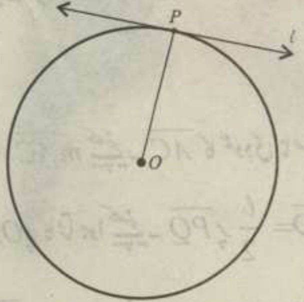
ہمیں جاننا چاہیے کہ:

وہ نقطہ جس پر وسطانیے ملتے ہیں مثلث کا مرکزی نقطہ کہلاتا ہے

نوٹ:

- مثلث کا مرکزی نقطہ ہر وسطانیے کو 1 : 2 میں تقسیم کرتا ہے۔
- مساوی الاضلاع کے وسطانیے لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
- متساوی الساقین مثلث کے مساوی اضلاع کے وسطانیے لمبائی میں برابر ہوتے ہیں۔
- مثلث کے وسطانیے ایک ہی نقطہ پر مرتکز ہوتے ہیں۔

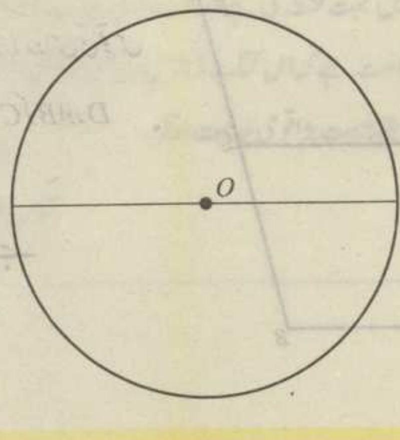
8.3 دائرہ کا مماس TANGENT TO THE CIRCLE



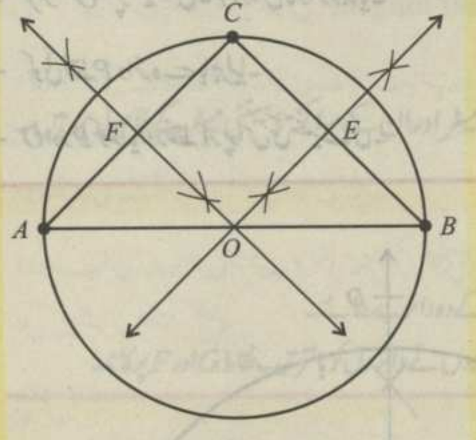
دائرہ کے ساتھ ہم سطح ایسا خط جو دائرہ کو ایک نقطہ پر مس کرتا ہو دائرہ کا خط مماس کہلاتا ہے اور یہ نقطہ جس پر خط مماس دائرہ کو مس کرتا ہے، نقطہ مماس کہلاتا ہے۔

8.3.1 دائرہ کا مرکز معلوم کرنا Locate the Centre of the Circle

- شکل میں ایک دائرہ دکھایا گیا ہے۔
- دائرہ کا مرکز نقطہ "O" پر ہے۔
- کسی دائرہ کا صرف ایک مرکز ہوتا ہے۔
- دائرہ کا مرکز اس کے خم پر واقع نہیں ہوتا۔
- دائرہ کا مرکز، قطر کا وسطی نقطہ ہوتا ہے۔
- دائرہ کے خمدار حصہ کے تمام نقاط مرکز سے یکساں فاصلہ پر ہوتے ہیں۔ اور ان کے فاصلے دائرہ کے رداس کہلاتے ہیں۔



8.3.2 تین غیر ہم خط نقاط میں سے دائرہ کھینچنا Draw a Circle Passing Through Three Non-Collinear Points



A، B اور C تین غیر ہم خط نقاط ہیں۔ ہم A، B اور C میں سے دائرہ گزارتے ہیں۔

مدارج عمل:

A، B اور C تین غیر ہم خط نقاط لیجیے۔

1- A کو B سے ملایے B کو C سے ملایے اور C کو A سے ملایے اس طرح شکل میں ΔABC بن جاتی ہے۔

2- اضلاع $\overline{AC}$ ، $\overline{BC}$ کے عمودی ناصف کھینچیں جو کہ ΔABC اضلاع کو بالترتیب نقاط F اور E پر کاٹتے ہیں۔

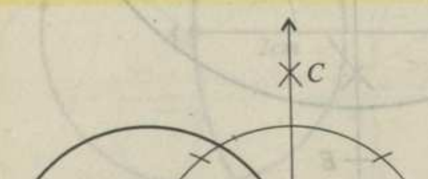
3- یہ ناصف نقطہ "O" پر ملتے ہیں۔

4- "O" کو مرکز مان کر رداس $\overline{OA}$ کے برابر پرکار کھول کر دائرہ لگایے۔ یہ دائرہ نقاط B اور C میں سے بھی گزرتا ہے۔

$$m\,\overline{OA} = m\,\overline{OB} = m\,\overline{OC}$$

8.3.3 دائرہ کا مماس Tangent to a Circle

◀ دائرہ کے محیط پر واقع نقطہ پر دائرہ کا مماس کھینچنا



مدارج عمل:

1- نقطہ "O" کو مرکز مان کر 2 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ بنایا۔

2- دائرہ پر کوئی نقطہ "A" لیا۔ نقطہ "A" کو O سے ملایا۔

3- پرکار کی مدد سے نقطہ A پر $m\angle \overline{OAC} = 90^o$ بنایا۔

4- $\overleftrightarrow{AC}$ دائرہ کا مطلوبہ مماس ہے۔

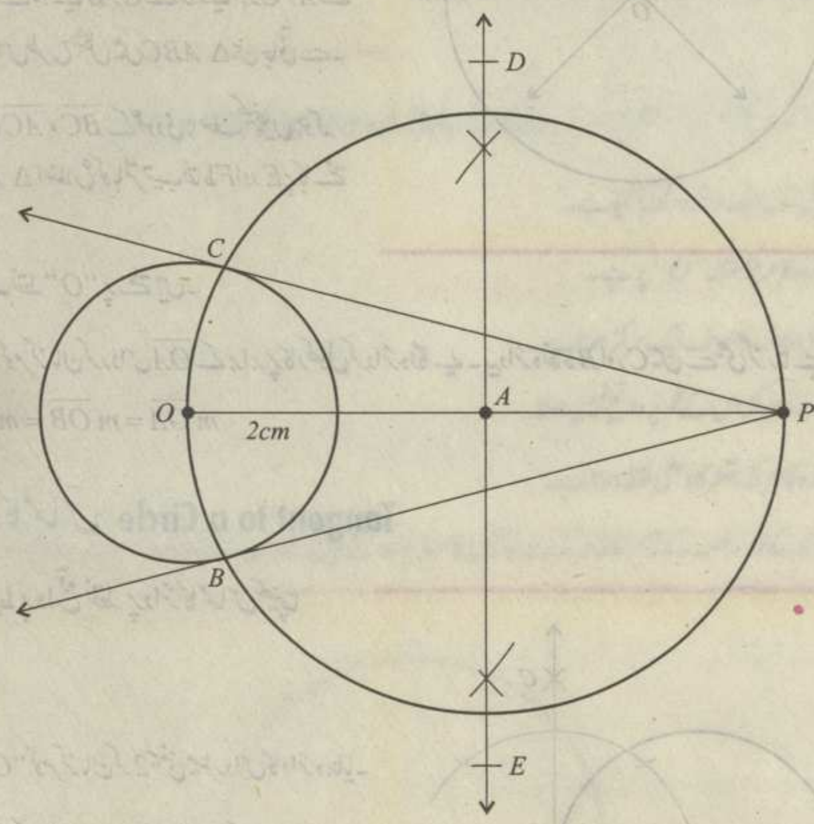
دائرہ کا بیرونی نقطہ سے مماس کھینچنا

مدارجِ عمل:

1- مرکز "O" پر 2 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ بنایا۔

2- کوئی نقطہ P دائرہ سے باہر لیا۔

3- O اور P کو ملایا اور نقطہ A پر اس کی تنصیف کی۔



4- "A" کو مرکز مان کر رداس $m\,\overline{OA} = m\,\overline{AP}$ کا دائرہ لگایا جس نے دیے گئے دائرہ کو نقاط B اور C پر کاٹا۔

5- نقطہ P کو باری باری نقاط B اور C سے ملا کر بڑھایا۔

6- نقطہ P سے $\overrightarrow{PB}$ اور $\overrightarrow{PC}$ دو دیے ہوئے دائرہ پر مماس ہیں۔

8.3.4 دو یکساں دائروں کا مماس کھینچنا Drawing Tangent to Two Equal Circles

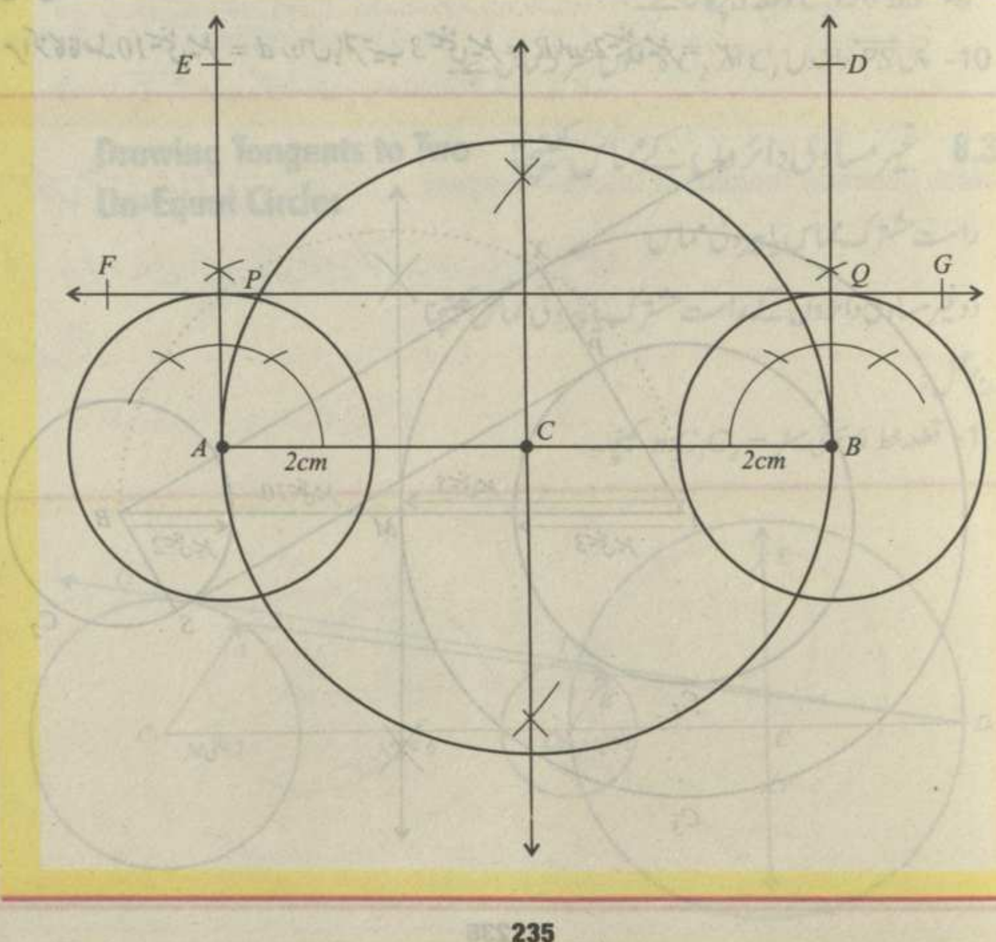
مشترک راست مماس یا بیرونی مماس Direct Common Tangent or External Tangent

اگر مشترک مماس کے دونوں دائروں کے ساتھ نقاط مماس دائروں کے مراکز کو ملانے والے خط ایک ہی جانب واقع ہوں تو وہ مشترکہ راست مماس یا بیرونی مماس کہلاتا ہے۔

◀ دو دائروں کا مشترکہ راست مماس کھینچنا جن کے رداس 2 سینٹی میٹر اور ان کے مراکز 5 سینٹی میٹر کے فاصلہ پر ہیں۔

مدارج عمل:

1- قطعہ خط AB برابر 5 سینٹی میٹر کھینچا۔
2- A اور B کو باری باری مرکز لے کر ہر ایک پر 2 سینٹی میٹر رداس کے دو دائرے بنائے۔
3- $m\angle ABD = 90^o$ اور $m\angle BAE = 90^o$ بنائے جنہوں نے دائروں کو بالترتیب نقاط G اور F پر کاٹا۔



4- G اور F کو ملایا۔

5- $\overline{GF}$ مطلوبہ مشترک بیرونی مماس ہے۔

معکوس مشترک مماس یا اندرونی مماس Transverse Common Tangent or Internal Tangent

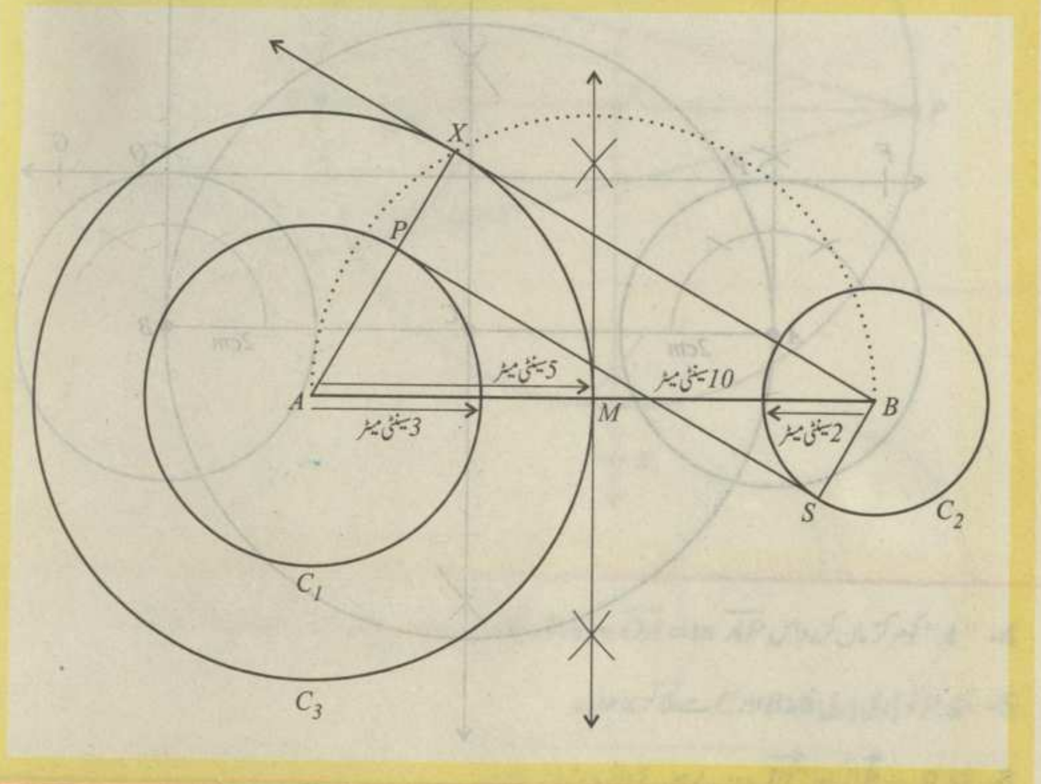
اگر دو دائروں کے مراکز مشترکہ مماس کے مخالف جانب واقع ہوں تو ایسا مماس معکوس مشترک مماس کہلاتا ہے۔

دو دائروں کے مشترک معکوس مماس کھینچنا۔

دو دائرے جن کے رداس بالترتیب 3 سینٹی میٹر اور 2 سینٹی میٹر ہیں اور ان کے مراکز 10 سینٹی میٹر کے فاصلہ پر ہیں ان کے مشترک معکوس کھینچیے۔

مدارج عمل:

مراکز کا فاصلہ 10 سینٹی میٹر $= d$ رداس بالترتیب 3 سینٹی میٹر $= R$ اور 2 سینٹی میٹر $= r$



1- قطعہ خط $m\overline{AB} =$ 10 سینٹی میٹر کھینچے۔

2- A مرکز پر دائرہ C_1 رداس 3 سینٹی میٹر کا کھینچے۔

3- B مرکز پر دائرہ C_2 رداس 2 سینٹی میٹر کا کھینچے۔

4- A مرکز پر دائرہ 5 سینٹی میٹر $+ 2 = 3$ رداس کا کھینچے۔

5- $\overline{AB}$ کا درمیانی نقطہ M لیکر نصف دائرہ $m\overline{MB} = m\overline{MA}$ رداس کا کھینچے جس نے 5 سینٹی میٹر رداس والے دائرے کو نقطہ X پر کاٹا۔

6- نقطہ B سے BX مماس 5 سینٹی میٹر رداس والے دائرے C_3 پر کھینچا۔

7- A کو X سے ملایا (جس نے دائرہ C_1 کو نقطہ P پر کاٹا)

8- سیٹ سکوائر کے استعمال سے نقطہ B سے $\overline{BS} \parallel \overline{AP}$ کھینچا۔

9- $\overline{BS}$ دائرہ C_2 کو نقطہ S پر کاٹتا ہے۔

10- پس $\overleftrightarrow{PS}$ دائروں C_1 اور C_2 کا معکوس مشترکہ مماس ہے۔

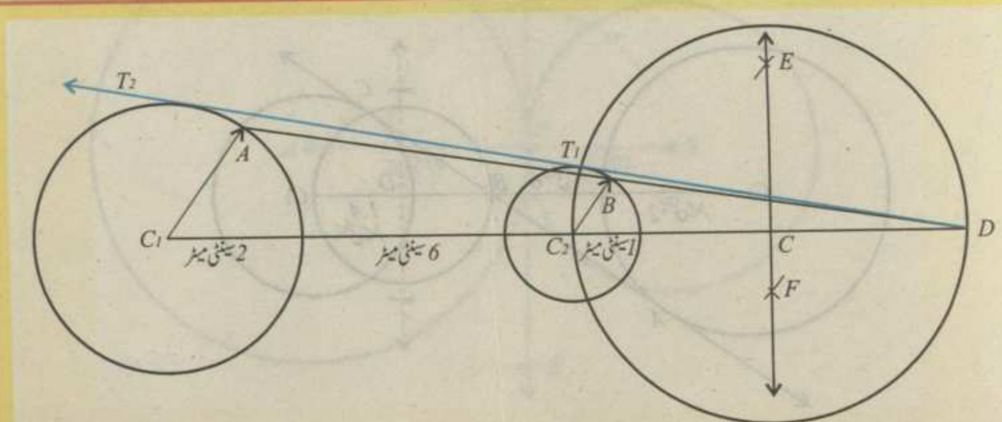
8.3.5 غیر مساوی دائروں کے مماس کھینچنا Drawing Tangents to Two Un-Equal Circles

راست مشترک مماس یا بیرونی مماس

- دو غیر مساوی دائروں کے راست مشترک یا بیرونی مماس کھینچنا

مدارج عمل:

1- قطعہ خط $mC_1C_2 =$ 6 سینٹی میٹر کھینچا۔



2- C_1 اور C_2 مراکز پر بالترتیب 2 سینٹی میٹر اور 1 سینٹی میٹر کے دائرہ کھینچیے۔

3- $C_1 C_2$ قطعہ خط کو دائیں جانب بڑھایے۔

4- نقاط C_1 اور C_2 سے $C_2B \parallel C_1A$ اس طرح کھینچیے کہ $\angle C_2C_1A$ ایک حادہ زاویہ ہو۔

5- نقاط A اور B کو ملایے اور اسے نقطہ D تک بڑھایے۔

6- C_2 میں سے گزرتا ہوا $\overline{C_1D}$ ناصف کھینچیے۔

7- C کو مرکز لیتے ہوئے اور $m\overline{CC_2} = m\overline{CD}$ کو رداس، ایک دائرہ کھینچیے۔
جو C_2 مرکز والے دائرہ کو T_1 پر قطع کرے۔

8- ایک خط کھینچیے جو نقاط D اور T_1 کو ملائے اور مرکز C_1 والے دائرہ کو T_2 پر مس کریے۔

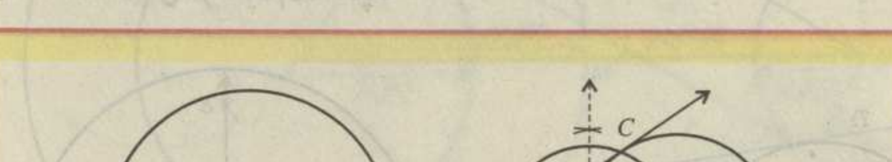
9- خط $\overline{T_1 T_2}$ دیے گئے دائروں پر براہ راست مشترکہ مماس ہے۔

معکوس مشترک مماس یا اندرونی مماس Transverse Common Tangent or Internal Tangent

◀ دو غیر مساوی دائروں کے معکوس مشترک یا اندرونی مماس کھینچنا

مدارج عمل:

1- قطعہ خط 6 سینٹی میٹر $= C_1C_2$ کھینچیے۔



2- C_1 کو مرکز مان کر 2 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ لگایے۔

3- C_2 کو مرکز مان کر 1.4 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ لگایے۔

4- $\overline{C_1C_2}$ کو $1.4:2$ میں تقسیم کیجیے۔

5- قطعہ خط BC_2 کی نقطہ D پر تنصیف کیجیے۔

6- D کو مرکز مان کر $m\,\overline{BD} = m\,\overline{DC_2}$ رداس کا دائرہ لگایے جو مرکز C_2 والے دائرے کو نقطہ C پر کاٹتا ہے۔

7- $\overleftrightarrow{CB}$ کو ملاتا ہوا خط B سے پرے بڑھایا جس نے C_1 مرکز والے دائرہ کو نقطہ A پر مس کیا۔

8- پس $\overline{AC}$ دیے گئے دائروں کا معکوس مماس ہے۔

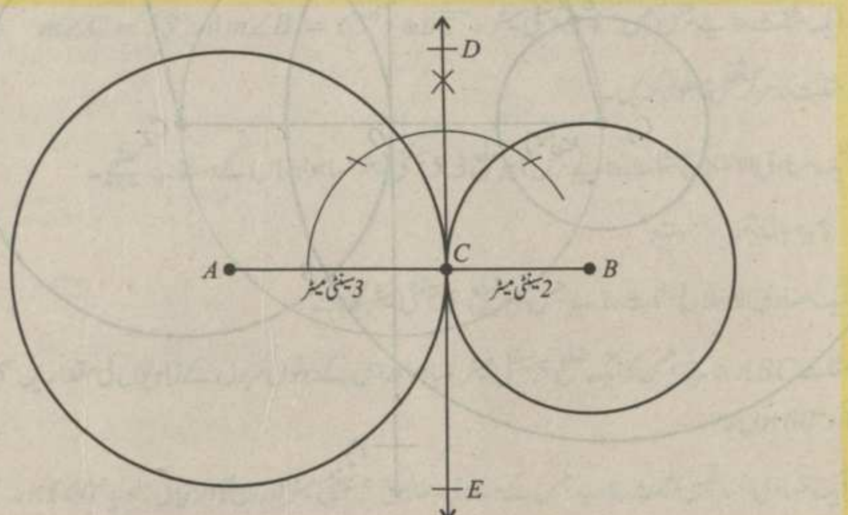
8.3.6 مماس کھینچنا Drawing Tangents

دو غیر مساوی مس کرتے ہوئے دائروں کا مماس Tangent to Two Unequal Touching Circles

◀ دو غیر مساوی مس کرتے ہوئے دائروں کا مماس کھینچیے۔

مدارجِ عمل:

1- نقطہ C پر مس کرتے ہوئے دائرے جن کے رداس 3 سینٹی میٹر اور 2 سینٹی میٹر ہوں کھینچیے۔



2- نقطہ C پر زاویہ $m\angle ACD = 90^o$ کھینچیے۔

3- C میں گزرتا ہوا خط $\overleftrightarrow{DE}$ کھینچیے۔

4- $\overleftrightarrow{DE}$ مطلوبہ دو غیر مساوی دائروں کا مشترک مماس ہے۔

دو غیر مساوی متقاطع دائروں کا مماس **Tangent to Two Unequal Intersecting Circles**

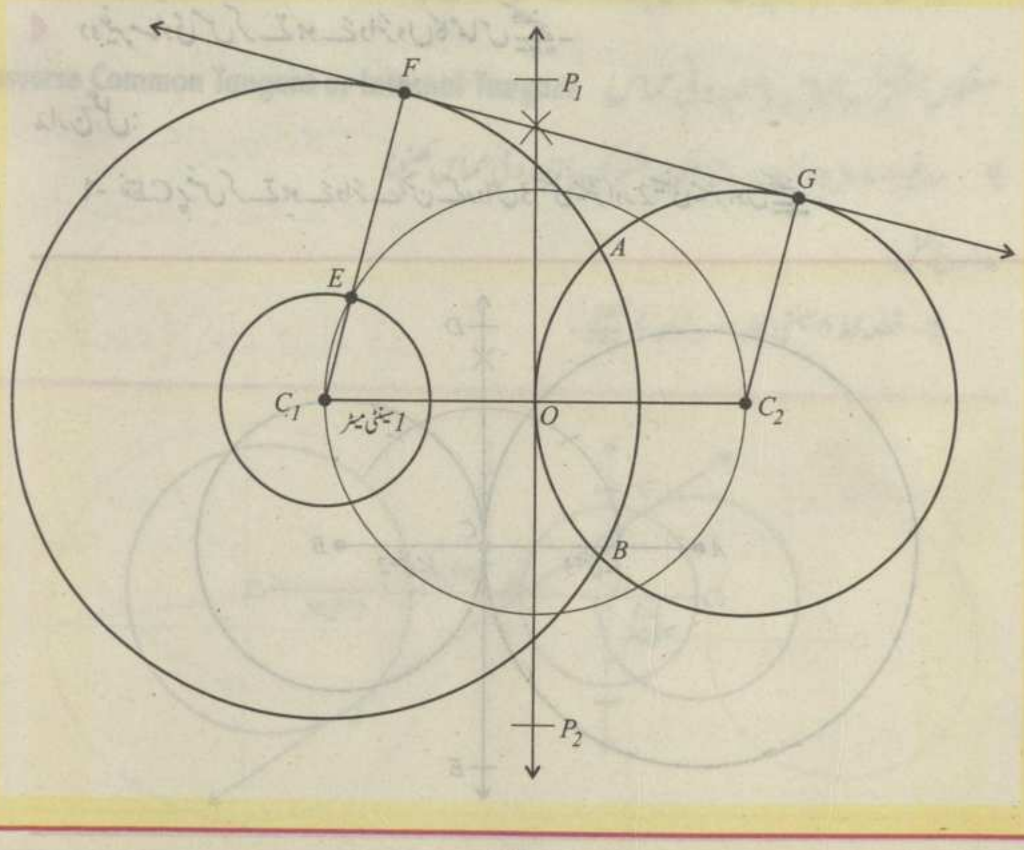
◀ دو غیر مساوی متقاطع دائروں کا مماس کھینچیے۔

بناوٹ:

1- قطعہ $\overline{C_1C_2}$ = 4 سینٹی میٹر کھینچیے۔

2- C_1 اور C_2 کو بالترتیب مراکز مان کر 3 سینٹی میٹر اور 2 سینٹی میٹر رداس کے دائرہ لگائیے۔ جو ایک دوسرے کو نقاط A اور B پر کاٹتے ہیں۔

3- C_1 کو مرکز مان کر 1 سینٹی میٹر = 2 سینٹی میٹر − 3 سینٹی میٹر کا دائرہ لگائیے۔



4- C_1C_2 کی نقطہ O پر تنصیف کیجیے۔

5- O کو مرکز مان کر $m\overline{C_1O} = m\overline{C_2O}$ رداس کا دائرہ کھینچیے۔ جس نے C_1 پر واقع اندرونی دائرے کو نقطہ E پر کاٹا۔

6- C_1 کو E سے ملا کر بڑھایا جس نے اس کے ہم مرکز دائرہ کو نقطہ F پر کاٹا۔

7- C_2 سے $\overline{C_1F}$ کے متوازی خط کھینچا جس نے C_2 مرکز والے دائرہ کو نقطہ G پر کاٹا۔

8- F اور G کو ملا کر لائن بنایے۔

9- $\overline{FG}$ دو غیر مساوی دائروں پر مطلوبہ راست مشترک مماس ہے۔

مشق 8.1

1- مثلث ABC بنایے جس میں $m\overline{BC} = 5.4$ سینٹی میٹر ، $m\overline{AB} = 4.3$ سینٹی میٹر اور $m\overline{AC} = 3.9$ سینٹی میٹر ہے۔ اس کا مرکز محصور معلوم کیجیے۔

2- مثلث ABC بنایے جس میں $m\overline{BC} = 4.6$ سینٹی میٹر ، $m\overline{AB} = 5$ سینٹی میٹر اور $\angle B = 110^o$

3- ایک مساوی الاضلاع مثلث ABC کھینچیے جس میں $m\overline{AB} = m\overline{BC} = m\overline{AC} = 5$ سینٹی میٹر اس کے ارتفاع کھینچیے۔ کیا یہ لمبائی میں برابر ہیں؟

4- ایک مثلث بنایے جس میں $m\overline{BC} = 5.4$ سینٹی میٹر ، $m\angle B = 65^o$ اور $m\angle C = 55^o$ مثلث کا مرکز ثقل معلوم کریں۔

5- ایک مساوی الاضلاع مثلث بنایے جس کا ہر ضلع 5.3 سینٹی میٹر لمبا ہو اور اس کے وسطانیے کھینچیے۔ کیا یہ لمبائی میں برابر ہے؟

6- ایک مساوی الاضلاع مثلث بنایے جس کا ہر ضلع 6 سینٹی میٹر کا ہو۔

7- مثلث ABC بنایے جس کا ایک ضلع 5 سینٹی میٹر لمبا ہو اور اس کے دونوں سروں کے زاویوں کی مقداریں 45^o اور 60^o ہوں۔

8- ایک متساوی الساقین مثلث بنایے جس کے مساوی اضلاع 5 سینٹی میٹر اور ان کا درمیانی زاویہ 60^o کا ہو۔

9- ایک مستطیل بنایے جس کے متصلہ اضلاع کی لمبائیاں 4 سینٹی میٹر اور 3 سینٹی میٹر ہوں۔

10- ایک مستطیل بنایے جس کا ایک 6 سینٹی میٹر اور متصلہ وتر 9 سینٹی میٹر کا ہو۔

11- ایک مربع بنایے جس کا ہر ضلع 5 سینٹی میٹر ہو۔

12- ایک مربع بنایے جس کا ہر ضلع 3.5 سینٹی میٹر کا ہو۔

13- ایک مستطیل بنایے جس کے متصلہ اضلاع 5 سینٹی میٹر اور 4 سینٹی میٹر ہوں اوران کے درمیان 90^o کا زاویہ ہو۔

14- ایک مستطیل بنایے جس کے ایک ضلع کی مقدار 8 سینٹی میٹر اور دونوں وتروں میں سے ہر ایک 10 سینٹی میٹر کا ہو۔

15- ایک مستطیل بنایے جس میں $m\,\overline{AB} =$ 6.5 سینٹی میٹر اور $m\,\overline{AD} =$ 4.8 سینٹی میٹر

اور $m\angle BAD = 90^o$۔ اس کے وتروں کی پیمائش کیجیے۔

16- درج ذیل چوکوروں کے نام بتایے کہ

(i) وتروں کی لمبائیاں برابر متصلہ اضلاع غیر مساوی ہوں۔

(ii) وتر بھی مساوی ہوں اور متصلہ اضلاع بھی مساوی ہوں۔

(iii) تمام اضلاع لمبائی میں برابر اور ایک زاویہ 90^o کا ہو۔

(iv) تمام زاویے برابر مگر متصلہ اضلاع غیر مساوی ہوں۔

17- ایک مستطیل بنایے جن کے اضلاع کی لمبائیاں 10 سینٹی میٹر اور 6 سینٹی میٹر ہوں۔

18- ایک مربع بنایے جس کے ہر ضلع کی لمبائی 6 سینٹی میٹر ہو۔

19- درج ذیل مثلثوں کے نام بتایے۔

(i) جس کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں برابر ہوں۔

(ii) جس کے دو اضلاع کی لمبائیاں برابر ہوں۔

(iii) کوئی بھی ضلع دوسرے ضلع کے برابر نہ ہو۔

20- ایک دائرہ جس کا مرکز O اور رداس 5 سینٹی میٹر ہو بنایے ۔ دائرہ کا قطعہ کھینچنے کے لیے ضروری اقدامات کی وضاحت کیجیے۔

21- کسی بھی رداس دائرہ جس کا مرکز O ہو کھینچیے ۔ اس کا قطر AB کھینچیے اور ایک نصف دائروی علاقہ کو سایہ دار بنایے۔

22- سوال 21 میں نصف دائروی علاقے میں 4 زاویوں کی نشاندہی کریں۔

23- 2 سینٹی میٹر رداس کا دائرہ مرکز O پر بنایے ۔ ایک وتر بنا کر قوس کبیرہ کا حصہ سایہ دار بنایے۔

24- مرکز O پر دائرہ 2.5 سینٹی میٹر رداس کا بنایے۔ وتر بنا کر قوس کبیرہ کا حصہ سایہ دار بنا کر ظاہر کیجیے۔

25- مرکز O پر 4 سینٹی میٹر لمبائی کے وتر والا نصف دائرہ بنایے۔

26- 3 سینٹی میٹر لمبائی کے ضلع والے مربع کے راسوں میں سے گزرتا ہوا دائرہ بنایے۔

27- ایک مثلث ABC جس میں 3 سینٹی میٹر $= mAB$ اور 4 سینٹی میٹر $= mBC$ اور راس B پر زاویہ قائمہ ہو۔
A، B اور C میں سے گزرتا ہوا دائرہ بنایے۔

28- مساوی الاضلاع جس کے ہر ضلع کی لمبائی 4 سینٹی میٹر ہو، اس کے راسوں میں سے گزرتا ہوا دائرہ بنایے۔

جائزہ مشق 8

I- صحیح جوابات کو دائرہ لگایے۔

1. ایک مثلث میں وسطانیوں کی تعداد ہوتی ہے:

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

2. ایک مثلث میں ارتفاع ہوتے ہیں:

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

3. مثلث میں زاویوں کے ناصف ہوتے ہیں:

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

4. کسی مثلث کے اضلاع کے ناصفوں کی تعداد ہوتی ہے:

(a) 1 (b) 2
(c) 3 (d) 4

5. مثلث کے زاویوں کے ناصف ہوتے ہیں:

(a) ایک نقطہ پر مرتکز (b) ہم خط
(c) آپس میں عموداً (d) غیر ہم نقطہ

6. مثلث کے وسطانیے ہوتے ہیں:

(a) ایک نقطہ پر مرتکز (b) ہم خط
(c) غیر ہم نقطہ (d) 4

7. مثلث کے ارتفاع ہوتے ہیں:

(a) ایک نقطہ پر مرتکز (b) ہم خط
(c) غیر ہم خط (d) 5

8. مثلث کے ایک راس سے مخالف ضلع کے وسطی نقطہ کو ملانے والا خط کہلاتا ہے:

(a) زاویہ کا ناصف (b) ارتفاع
(c) وسطانیہ (d) ضلع کا ناصف

9. مثلث کے راس سے مخالف ضلع پر عمود کہلاتا ہے:

(a) زاویہ کا ناصف (b) وسطانیہ

(c) ارتفاع (d) ضلع کا ناصف

10. ہم مستوی دائرہ کے ساتھ ایک خط جو دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرے کہلاتا ہے:

(a) خط مماس (b) وسطانیہ

(c) ارتفاع (d) خط عمود

II- خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. مثلث کے ارتفاع ہوتے ہیں ______۔

2. مثلث کے وسطانیے ہوتے ہیں ______۔

3. مثلث کے زاویوں کے ناصف ہوتے ہیں ______۔

4. مثلث کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصف ہوتے ہیں ______۔

5. مثلث کے ایک راس کے مخالف ضلع پر عمود ______ کہلاتا ہے۔

6. مثلث کے راس سے اس کے مخالف ضلع کے وسطی نقطہ کو ملانے والا خط ______ کہلاتا ہے۔

7. خط جو مثلث کے کسی زاویہ کی تنصیف کرے ______ کہلاتا ہے۔

8. ہر مثلث کے ______ ارتفاع ہوتے ہیں۔

9. ہر مثلث کے ______ وسطانیے ہوتے ہیں۔

10. ہر مثلث کے ______ عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

خلاصہ SUMMARY

1- کسی مثلث کے زاویہ کا ناصف وہ خط ہوتا ہے جو مثلث کے کسی زاویہ کی تنصیف کرے اور اس کا دوسرا سرا مخالف ضلع کو چھوئے۔

2- ہر مثلث کے تین زاویوں کے ناصف ہوتے ہیں، ہر ایک زاویہ کا ایک ناصف۔

3- مثلث کے ارتفاع کسی راس سے مخالف ضلع پر عمود ہوتا ہے۔

4- ہر مثلث کے تین ارتفاع ہوتے ہیں، ہر ایک راس سے ایک۔

5- ایسا قطعہ خط جو کسی مثلث کے ایک ضلع کی تنصیف کرے اور ضلع کے نقطہ تنصیف پر عمود بھی ہو تو وہ اس ضلع کا عمودی ناصف کہلاتا ہے۔

6- کسی مثلث کے عمودی ناصف تین ہوتے ہیں، ہر ایک ضلع کا ایک۔

7- وہ نقطہ جس پر مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف باہم ملتے ہیں مرکز محصور کہلاتا ہے۔

8- وہ نقطہ جس پر مثلث کے تینوں ارتفاع ملتے ہیں، مثلث کا مرکز عمود کہلاتا ہے۔

9- وہ نقطہ جس پر مثلث کے اضلاع کے تینوں عمودی ناصف ملتے ہیں، مثلث کا مرکز محاصر کہلاتا ہے۔

10- وہ نقطہ جس پر مثلث کے تینوں وسطانیے ملتے ہیں، مثلث کا مرکزی نقطہ کہلاتا ہے۔

11- دائرہ کے ساتھ ہم مستوی ایسا خط جو دائرہ کو صرف نقطہ پر کاٹتا ہے، دائرہ کا مماس کہلاتا ہے۔

یونٹ

9

رقبہ اور حجم AREAS AND VOLUMES

- مسئلہ فیثا غورث
- رقبہ
- حجم

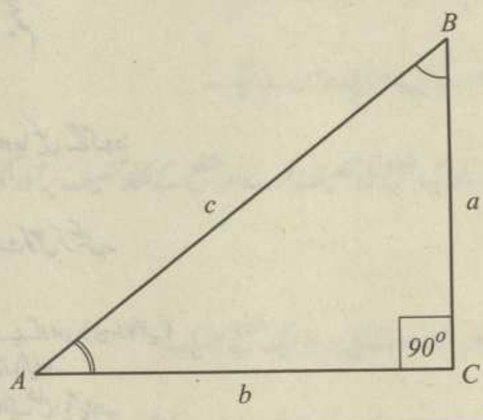
اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- مسئلہ فیثا غورث بیان کر سکیں۔
- مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے قائمہ زاویہ مثلث کو حل کر سکیں۔
- رقبہ معلوم کر سکیں کہ:
  - ایک مثلث کا جب کہ اس کے تینوں اضلاع دیے گئے ہوں (ہیروز کا کلیہ)
  - ایک مثلث کا جب کہ اس کا قاعدہ اور ارتفاع دیا گیا ہو۔
  - ایک مساوی الاضلاع مثلث کا جب کہ اس کا ایک ضلع دیا گیا ہو۔
  - ایک مستطیل کا جب کہ اس کے دو متصلہ اضلاع دیے گئے ہوں۔
  - ایک متوازی الاضلاع کا جب کہ اس کا قاعدہ اور ارتفاع دیا گیا ہو۔
  - ایک مربع کا جب کہ اس کا ایک ضلع دیا گیا ہو۔
  - کمرہ کی چار دیواروں کا جب کہ ان کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی دی گئی ہو۔
- ایک مربعی/مستطیلی میدان پر فرش لگانے کا خرچ معلوم کر سکیں۔
- ایک مستطیل پلاٹ کے باہر فٹ پاتھ پر دی گئی سمتوں کے حساب سے ٹائلوں کی تعداد معلوم کر سکیں۔
- دائرہ اور نصف دائرہ کا رقبہ معلوم کر سکیں جب کہ اس کا رداس دیا گیا ہو۔
  - دو ہم مرکز دائروں کے درمیانی علاقہ کا رقبہ معلوم کر سکیں جب کہ ان کے رداس دیے گئے ہوں۔
- مثلث، مستطیل، مربع، متوازی الاضلاع اور دائرہ کے رقبہ سے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔
- حجم معلوم کر سکیں۔
  - ایک مکعب کا جب کہ اس کا ایک کنارا دیا گیا ہو۔
  - ایک مکعب نما کا جب کہ لمبائی، چوڑائی اور اونچائی دی گئی ہو۔
  - ایک سیدھے دائروی سلنڈر کا جس کے قاعدہ کا رداس اور اونچائی دی گئی ہو۔
  - ایک سیدھی کون (Cone) کا جس کا رداس اور اونچائی معلوم ہو۔
  - ایک کرہ اور نصف کرہ کا جس کا رداس دیا گیا ہو۔
- مکعب، مکعب نما، سلنڈر، کون اور کرہ کے حجم سے متعلق روزمرہ زندگی کے مسائل حل کر سکیں۔

9.1 مسئلہ فیثا غورث PYTHAGORAS THEOREM

قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کا مربع، اس کے باقی اضلاع کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

$$c^2 = a^2 + b^2$$

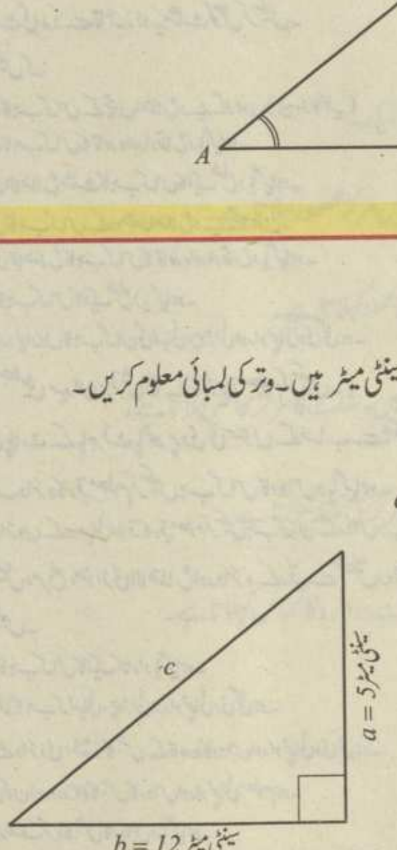


مثال 1:-

ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع 5 سینٹی میٹر اور 12 سینٹی میٹر ہیں۔ وتر کی لمبائی معلوم کریں۔

حل: چونکہ $a = 5$ سینٹی میٹر , $b = 12$ سینٹی میٹر

فرض کیا کہ وتر کی لمبائی c ہے۔ تو مسئلہ فیثا غورث کی رو سے



$$c^2 = a^2 + b^2$$

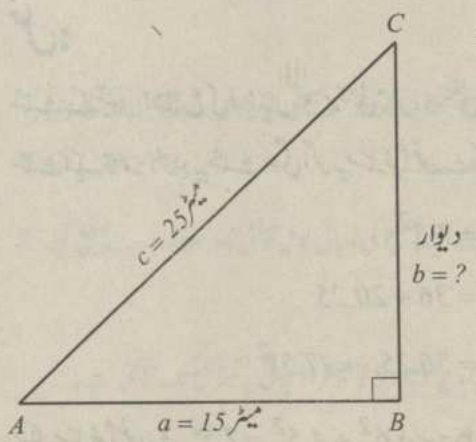
$$= (5)^2 + (12)^2$$

$$= 25 + 144 = 169$$

$c = 13$ سینٹی میٹر

مثال 2:-

ایک سیڑھی جس کی لمبائی 25 میٹر ہے کو دیوار کے ساتھ اس طرح کھڑا کیا گیا ہے کہ اس کا پایہ دیوار سے 15 میٹر کے فاصلہ پر ہے۔ بتایے سیڑھی دیوار کے ساتھ کتنی بلندی تک جاتی ہے؟



حل: چونکہ $a = 15$ میٹر, $c = 25$ میٹر

فرض کیا کہ مطلوبہ اونچائی b ہو تو

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$= (25)^2 - (15)^2$$

$$= 625 - 225$$

$$= 400$$

$$b = 20 \text{ میٹر}$$

مثال 3:-

اگر کسی مثلث کے اضلاع 30، 72 اور 78 ہوں تو کیا یہ مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہے؟

حل: چونکہ $a = 30, \ b = 72, \ c = 78$

تو مسئلہ فیثا غورث کی رو سے $c^2 = a^2 + b^2$

$$R.H.S = a^2 + b^2 = (30)^2 + (72)^2$$

$$= 900 + 5184$$

$$= 6084$$

$$L.H.S = c^2 = (78)^2$$

$$= 6084$$

$$R.H.S = L.H.S$$

پس مثلث ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

مثال 4:-

اگر مثلث کے لمبائیاں 4.5 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر اور 7.5 سینٹی میٹر ہوں تو کیا یہ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہوگی؟ اگر ایسا ہے تو اس میں وتر کونسا ضلع ہوگا؟

حل:

مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں 4.5 سینٹی میٹر، 6 سینٹی میٹر اور 7.5 سینٹی میٹر دی گئی ہیں۔
مثلث ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہوگی اگر یہ مسئلہ فیثا غورث کی شرط پر پوری اترے۔

$$6^2 + 4.5^2 = 7.5^2$$

$$(6)^2 + (4.5)^2 = 36 + 20.25$$

$$= 56.25 \quad = (7.5)^2$$

چونکہ مسئلہ فیثا غورث $6^2 + 4.5^2 = 7.5^2$ درست ثابت ہوگیا ہے۔ لہٰذا یہ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

اور $7.5^2 = 6^2 + 4.5^2$

∴ پس 7.5 سینٹی میٹر لمبائی والا ضلع وتر ہے۔

مشق 9.1

1- قائمۃ الزاویہ مثلث کا تیسرا ضلع معلوم کریں جبکہ a, b اس کے دو اضلاع اور c وتر ہو۔

(i) $a = 3, \quad b = 4, \quad c = ?$

(ii) $a = 5, \quad c = 13, \quad b = ?$

(iii) $b = 5, \quad c = 61, \quad a = ?$

2- اگر قائمۃ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع $2ab$ اور $a^2 - b^2$ ہوں تو ثابت کیجیے کہ وتر کی لمبائی $a^2 + b^2$ ہے۔

3- اس متساوی الساقین قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر معلوم کریں جس کے ہر ضلع کی لمبائی 'l' ہو۔

4- اُس متساوی الساقین قائمۃ الزاویہ کے وتر کی لمبائی معلوم کریں جس کے ہر ضلع کی لمبائی 8 سینٹی میٹر ہو۔

5- اگر درج ذیل دیے گئے نمبر مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہوں تو ان میں سے کون سی قائمۃ الزاویہ مثلث ہے؟

(i) $3, 4, 5$

(ii) $9, 17, 25$

(iii) $11, 61, 60$

6- مثلث ABC میں C قائمہ زاویہ ہے۔ اگر $m\overline{AC} = 9$ سینٹی میٹر اور $m\overline{BC} = 12$ سینٹی میٹر ہو تو AB کی مقدار معلوم کریں، مسئلہ فیثاغورث استعمال کرتے ہوئے۔

7- قائمۃ الزاویہ مثلث کا وتر 25 سینٹی میٹر ہے۔ اگر اس کے ایک ضلع کی لمبائی 24 سینٹی میٹر ہو تو دوسرے ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔

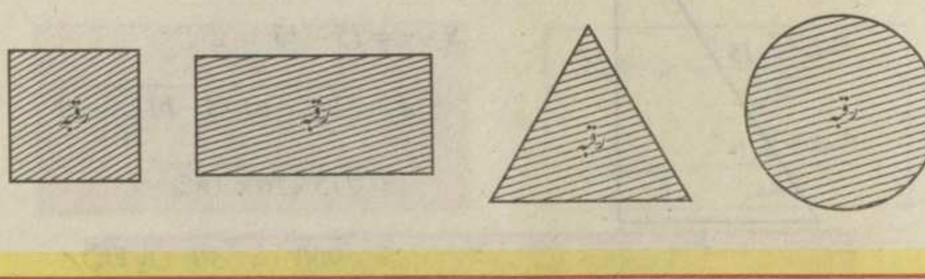
8- 17 میٹر سیڑھی کو مکان کی دیوار سے لگایا جائے تو یہ دیوار پر موجود 15 میٹر اونچائی پر کھڑکی تک پہنچتی ہے۔ اس کا پایہ دیوار سے کتنا دور ہے؟

9- ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے دو اضلاع برابر ہیں۔ اگر اس کے وتر کے مربع کی مقدار 50 ہو تو ہر ایک ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔

10- ایک مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں 36 سینٹی میٹر، 15 سینٹی میٹر اور 39 سینٹی میٹر ہیں۔ ثابت کیجیے کہ یہ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

9.2 رقبہ AREAS

کسی بند شکل کی چار دیواری میں گھری ہوئی جگہ اس کا رقبہ کہلاتی ہے۔



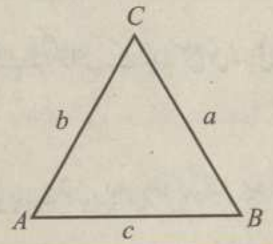
9.2.1 مثلث کا رقبہ The Area of a Triangle

مثلث کا رقبہ جب کہ اس کے تینوں اضلاع دیے گئے ہوں۔

مثلث ABC جس کے اضلاع کی لمبائیاں a, b, c ہیں اور

$$2S = a+b+c \quad \Rightarrow \quad S = \frac{a+b+c}{2},$$

جبکہ 'S' مثلث کے احاطہ کا نصف ہے۔



کسی عام مثلث کا رقبہ $A = \sqrt{S(S-a)\ (S-b)\ (S-c)}$ ہوتا ہے۔

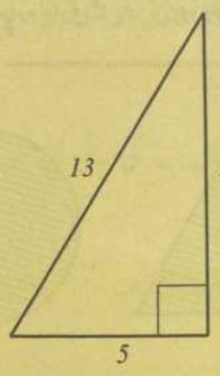
یہ مثلث کا رقبہ معلوم کرنے کے لیے ہیروز فارمولا کہلاتا ہے۔

مثال:- مثلث جس کے اضلاع کی لمبائیاں 12,5 اور 13 ہیں۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: کیونکہ $a = 5, b = 12, c = 13$

تو $2S = a + b + c$

$$2S = 5 + 12 + 13 = 30 \quad \Rightarrow \quad S = 15$$



$$S - a = 15 - 5 = 10,$$

$$S - b = 15 - 12 = 3,$$

$$S - c = 15 - 13 = 2$$

$$A = \sqrt{S(S-a)\ (S-b)\ (S-c)}$$

$$= \sqrt{15 \times 10 \times 3 \times 2}$$

$= \sqrt{900} = 30$ مربع اکائیاں

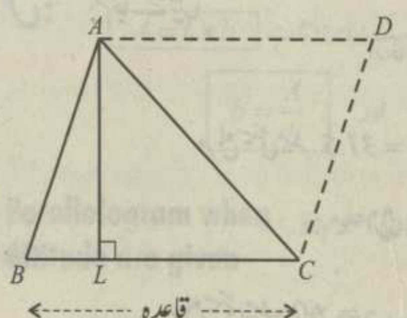
نوٹ: اس سوال میں مثلث قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔جس کا قاعدہ 5 عمود 12 اور وتر 13 ہے۔

پس $\text{رقبہ} = \frac{1}{2}\ (\text{قاعدہ}) \times (\text{عمود})$

$A = \frac{1}{2}\ (5)\ (12) = \frac{60}{2} = 30$ مربع اکائیاں

نوٹ: مثلث کے رقبہ کو A سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثلث کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کا قاعدہ اور عمودی بلندی معلوم ہو۔ Area of a Triangle when base and Altitude are given



شکل کے مطابق کوئی مثلث ABC بنایئے۔
فرض کیا $\overline{BC}$ اس کا قاعدہ ہے اور $\overline{AL} \perp \overline{BC}$
لہٰذا $\overline{AL}$ اس کے مطابق عمودی بلندی ہے۔
A اور C سے بالترتیب $\overline{BC}$ اور $\overline{BA}$ کے متوازی خطوط کھینچیے جو ایک دوسرے کو نقطہ D پر ملتے ہیں۔
لہٰذا $ABCD$ واضح طور پر ایک متوازی الاضلاع ہے۔جس کا قاعدہ $\overline{BC}$ اور اس کے مطابق $\overline{AL}$ عمودی بلندی ہے۔

$$\Delta ABC \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2}\ (\text{متوازی الاضلاع } ABCD \text{ کا رقبہ})$$

$$= \frac{1}{2}(b \times h)$$ جبکہ b قاعدہ اور h عمودی بلندی ہے۔

پس معلوم ہوا کہ $\Delta \text{ کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود}$

$$\text{قاعدہ} = \frac{2 \times \text{مثلث کا رقبہ}}{\text{ارتفاع}}$$

$$\text{ارتفاع} = \frac{2 \times \text{مثلث کا رقبہ}}{\text{قاعدہ}}$$

اہم بات
مثلث کا ارتفاع اس کی عمودی بلندی کو کہتے ہیں۔
جسے علامت h سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

قاعدہ کی علامت b اور ارتفاع کی علامت h ہے۔

مثال 1:- مثلث کا ارتفاع معلوم کریں جس کا قاعدہ 16 سینٹی میٹر اور رقبہ 34 مربع سینٹی میٹر ہے۔

> **نوٹ**
> قائمۃ الزاویہ مثلث میں قائمہ زاویہ کے سامنے والا ضلع اس کا وتر کہلاتا ہے

حل:
$$\text{مثلث کا ارتفاع} = \frac{2 \times \text{مثلث کا رقبہ}}{\text{قاعدہ}}$$

رقبہ = 34 مربع سینٹی میٹر ، قاعدہ = 16 سینٹی میٹر

$$\text{ارتفاع} = \frac{2 \times \text{رقبہ}}{\text{قاعدہ}} = \left(\frac{2 \times 34}{16}\right) = 4.25 \text{ سینٹی میٹر}$$

مثال 2:- مثلثان کے رقبے معلوم کریں جن کا

(i) ارتفاع = 3.5 سینٹی میٹر ، قاعدہ = 18 سینٹی میٹر

(ii) ارتفاع = 15 سینٹی میٹر ، قاعدہ = 8 سینٹی میٹر

حل: ہم جانتے ہیں

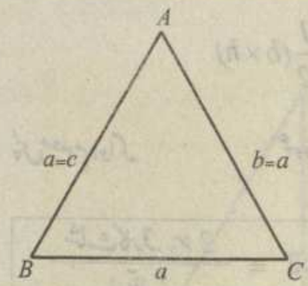
(i) $$\text{مثلث کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{ارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2} \times 18 \times 3.5 = 31.5 \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

(ii) $$\text{مثلث کا رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{ارتفاع}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60 \text{ مربع سینٹی میٹر}$$

مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ معلوم کرنا جس کے ضلع کی لمبائی معلوم ہو۔
Area of an Equilateral Triangle when its side is given



مساوی الاضلاع مثلث ABC میں $a = b = c$

لہٰذا $$S = \frac{a+a+a}{2} = \frac{3a}{2}$$

$$S-a = \frac{a}{2},\ S-b = \frac{a}{2},$$

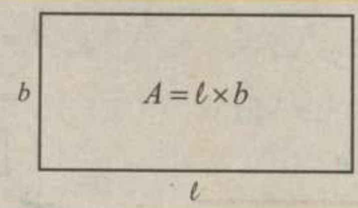
$$S-c = \frac{a}{2}$$

$$\Delta = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} = \sqrt{\frac{3a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}\ a^2}{4}$$

مساوی الاضلاع مثلث، ABC کا رقبہ $\frac{\sqrt{3}\ a^2}{4}$ ہوتا ہے

مستطیل کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ دو اضلاع معلوم ہوں
Area Of A Rectangle When Its Two Sides Are Given

شکل میں دی گئی مستطیل کو لیجیے۔



مستطیل کی لمبائی $= \ell$

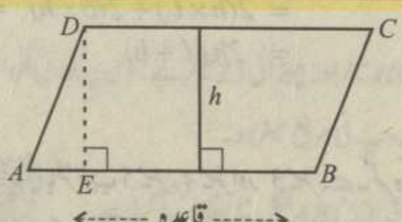
مستطیل کی چوڑائی $= b$

مستطیل کا رقبہ، مستطیل کی لمبائی اور چوڑائی کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے $\boxed{A = \ell \times b}$

پس $\boxed{\ell = \frac{A}{b}}$ اور $\boxed{b = \frac{A}{\ell}}$

متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کا قاعدہ اور ارتفاع معلوم ہو
Area of a Parallelogram when base and Altitude are given

متوازی الاضلاع کا رقبہ، اس کے قاعدہ اور قاعدہ پر گرائے گئے ارتفاع کے حاصل ضرب کے برابر ہوتا ہے۔



متوازی الاضلاع کا رقبہ $ABCD = A =$ قاعدہ × ارتفاع

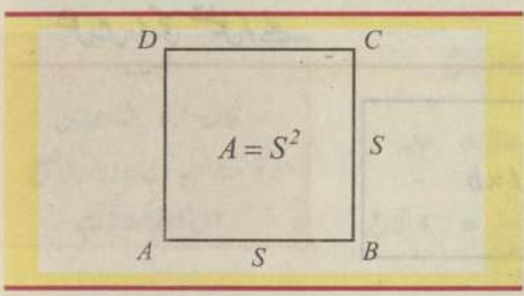
$\boxed{A = b \times h}$

$\boxed{\text{قاعدہ} = b = \frac{A}{h}}$

$\boxed{\text{ارتفاع} = h = \frac{A}{b}}$

> **اہم بات**
>
> **مثلث کا رقبہ**
>
> $A = \frac{1}{2} \times$ قاعدہ × ارتفاع

مربع کا رقبہ معلوم کرنا جبکہ اس کا ضلع معلوم ہو: **Area of a Square when its side is given**



مربع $ABCD$ کا رقبہ اس کے ضلع پر مربع کے برابر ہوتا ہے۔

$$A = \text{ضلع} \times \text{ضلع}$$

$$= S \times S = S^2$$

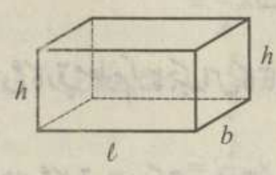
$$\boxed{A = S^2}$$

$$\text{ضلع} = S = \sqrt{A}$$

رقبہ کی پیمائش کی اکائیاں مربع سینٹی میٹر، مربع میٹر اور مربع کلومیٹر ہیں۔

کمرہ کی چار دیواروں کا رقبہ **Area of Four Walls of a Room**

ہم کمرہ کی چار دیواروں کا رقبہ معلوم کر سکتے ہیں جب کہ اس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی معلوم ہو۔



فرض کیا $\ell =$ کمرہ کی لمبائی

$b =$ کمرہ کی چوڑائی

$h =$ کمرہ کی اونچائی

چار دیواروں کا رقبہ $= h \times \ell + b \times h + h \times \ell + b \times h$

$= 2(h \times \ell) + 2(b \times h) = 2(h \times \ell + b \times h)$

$= 2h(\ell + b)$

مثال:-

کمرہ کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 5 میٹر، 4 میٹر اور 3 میٹر ہے۔ کمرہ کی دیواروں پر 7.50 روپے فی مربع میٹر سفیدی کرانے کا خرچ معلوم کریں۔

حل: چونکہ $h = 3$ میٹر، $b = 4$ میٹر، $\ell = 5$ میٹر

چار دیواروں کا رقبہ $= 2(\ell + b) \times h = 2(5 + 4) \times 3$

پس $= 18 \times 3 = 54$ مربع میٹر

7.50 روپے فی مربع میٹر سفیدی کرانے کا خرچ

$= 7.5 \times 54 = 405$ روپے

یاد رکھنے کی باتیں:

1- مستطیل کا رقبہ = (لمبائی × چوڑائی)

2- مستطیل کے وتر کی لمبائی = $\sqrt{(\text{لمبائی})^2 + (\text{چوڑائی})^2}$

3- مستطیل کا احاطہ = $2(\text{لمبائی} + \text{چوڑائی})$

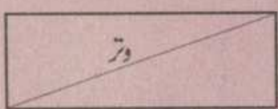
4- مربع کا رقبہ = a^2

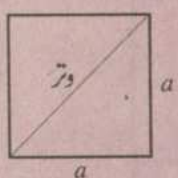
جبکہ مربع کا ضلع = a

5- مربع کے وتر کی لمبائی = $\sqrt{2}a$

6- مربع کا رقبہ = $\frac{1}{2}(\text{وتر})^2$

7- مربع کا احاطہ = ضلع × 4



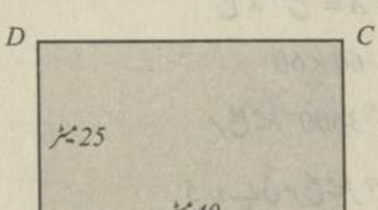


9.2.2 مستطیلی اور مربعی علاقوں کا رقبہ Areas of Rectangular and Square Fields

اندر یا باہر ہمارے اردگرد عموماً مستطیلی راستے یا میدان ہوتے ہیں۔ ہم اِن کے رقبے کا طریقہ کچھ مثالوں سے واضح کرتے ہیں۔

مثال 1:-

ایک مستطیلی علاقے کی لمبائی 40 میٹر اور چوڑائی 25 میٹر ہے۔ اس پر گھاس لگوانے کا خرچ معلوم کریں، اگر گھاس لگوانے کا خرچ 16 روپے فی مربع میٹر ہو۔



حل: فرض کیا دیا گیا علاقہ $ABCD$ شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

مستطیلی علاقے کی لمبائی = 40 میٹر

مستطیلی علاقے کی چوڑائی = 25 میٹر

مستطیلی علاقے کا رقبہ = $A = \ell \times b$

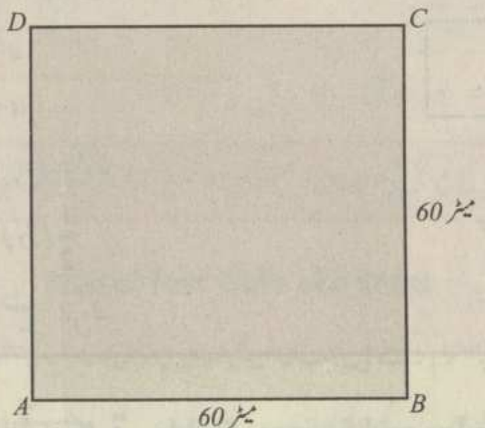
$= 40 \times 25 = 1000$ مربع میٹر

گھاس لگوانے کا خرچ = 16 روپے فی مربع میٹر

کُل خرچ = $16 \times 1000 = 16000$ روپے

مثال 2:-

مربعی میدان جس کے ہر ضلع کی لمبائی 60 میٹر ہے۔ اس میدان کا رقبہ معلوم کیجیے اور اس پر 5 روپے فی مربع میٹر گھاس لگوانے کا خرچ معلوم کریں۔



حل:

فرض کیا مطلوبہ مربعی میدان ABCD شکل میں دکھایا گیا ہے۔

مربعی علاقہ کے ضلع کی لمبائی = 60 میٹر

مربع کا رقبہ = A = ضلع × ضلع

$= 60 \times 60$

= 3600 مربع میٹر

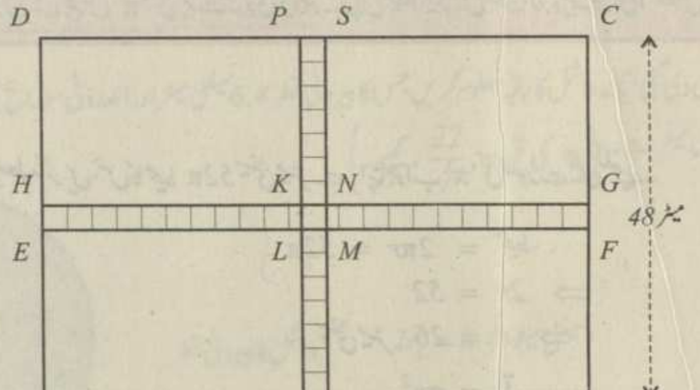
مربعی علاقے پر گھاس لگوانے کا ریٹ = 5 روپے فی مربع میٹر

∴ مربعی علاقے پر گھاس لگوانے کا خرچ $= 3600 \times 5$

= 18000 روپے

مثال 3:-

ایک پارک جس کی لمبائی 72 میٹر اور چوڑائی 48 میٹر ہے۔ جس کے وسط میں 2 میٹر چوڑی دو سڑکیں ایک دوسرے پر عموداً اور پارک کے اضلاع کے متوازی گزرتی ہیں۔ اِن سڑکوں کا رقبہ معلوم کریں اور اِن راستوں کو خوبصورت بنانے کے لیے 4 مربع میٹر رقبہ کی کتنی ٹائلیں درکار ہوں گی؟



حل:

شکل میں $ABCD$ مستطیلی علاقہ پارک کو ظاہر کرتا ہے۔ جبکہ مستطیل $PQRS$ اور مستطیل $EFGH$ سڑکوں کو ظاہر کرتی ہے۔

سڑکوں کا رقبہ $=$ $PQRS$ کا رقبہ $+$ $EFGH$ کا رقبہ $-$ $KLMN$ کا رقبہ

$= \left[(48 \times 2) + (72 \times 2) - (2 \times 2)\right]$ مربع میٹر

$= (96 + 144 - 4)$ مربع میٹر

$= 236$ مربع میٹر

پس ٹائیلوں کی تعداد $= \dfrac{236}{4} = 59$ ٹائلیں

9.2.4 دائرے کا رقبہ Area of a Circle

دائرے کا محیط $= 2\pi r$

جبکہ دائرے کا رداس 'r' ہے۔

دائرے کا رقبہ $= \pi r^2$

نوٹ:
مثالوں اور مشقوں میں جہاں 'π' کی قیمت نہ دی گئی ہو۔ وہاں کیلکولیٹر میں سٹور شدہ قیمت ہی استعمال کریں۔

مثال:-

اس دائرہ کا رقبہ معلوم کریں جس کا محیط 52π سینٹی میٹر ہے۔ اپنا جواب 'π' کی صورت میں لکھیے۔

حل:

محیط $= 2\pi r = 52\pi$

$\Rightarrow 2r = 52$

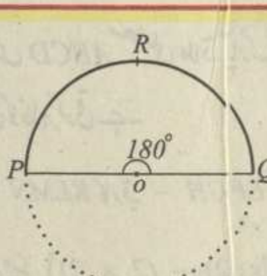
$\Rightarrow r = 26$ سینٹی میٹر

رقبہ $= \pi r^2$

$= \pi\ (26)^2$

$= 676\pi$ مربع سینٹی میٹر

نصف دائرہ کا رقبہ Area of a Semicircle



نصف دائرہ، دائرہ کا آدھا یا نصف ہوتا ہے۔
جو کہ قطر اور دائرہ کے آدھے محیط پر مشتمل ہوتا ہے۔
دائرہ کا سیکٹر جس کا مرکزی زاویہ 180^o ہو،
بھی نصف دائرہ کہلاتا ہے۔

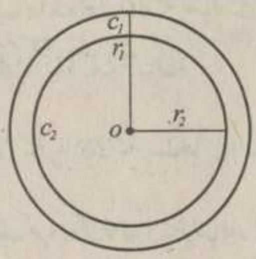
شکل میں

قوس کی لمبائی $PQ = \frac{1}{2}$ محیط

سیکٹر کا رقبہ $PRQ = \frac{1}{2}$ (دائرہ کا رقبہ)

نصف دائرہ کا رقبہ $= \frac{1}{2}\ (\pi r^2)$

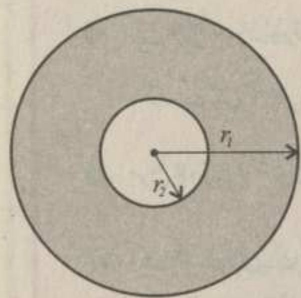
9.2.5 ہم مرکز دائروں کے رقبے Area of Concentric Circles



دائرے جن کے رداس مختلف لیکن مرکز ایک ہی نقطہ ہو، ہم مرکز دائرے کہلاتے ہیں۔ شکل میں c_1, c_2 دو ہم مرکز دائرے جن کا مرکز O ہے اور رداس مختلف r_1 اور r_2 ہیں۔

مثال:-

شکل میں دی گئی ایک واشل کا رقبہ معلوم کریں جس کا بیرونی قطر 6.4 سینٹی میٹر اور اندرونی سوراخ کا قطر 3.6 سینٹی میٹر ہے۔ (π کی قیمت $\frac{22}{7}$ رکھیے۔)



حل:

واشل کا بیرونی قطر $2r_1 = 6.4$ سینٹی میٹر

واشل کا بیرونی رداس $r_1 = \frac{6.4}{2}$

$r_1 = 3.2$ سینٹی میٹر

واشل کے اندرونی سوراخ کا رداس $= r_2 = \frac{3.6}{2} = 1.8$ سینٹی میٹر

واشل کا رقبہ $= \pi r_1^2 - \pi r_2^2$

$= \pi(3.2)^2$ مربع سینٹی میٹر $- \pi(1.8)^2$ مربع سینٹی میٹر

$= \pi\left[(3.2)^2 - (1.8)^2\right]$ مربع سینٹی میٹر

$= \pi(10.24 - 3.24)$ مربع سینٹی میٹر

$= (\pi \times 7)$ مربع سینٹی میٹر

$= \frac{22}{7} \times 7 = 22$ مربع سینٹی میٹر

مشق 9.2

-1 ایک برآمدہ جو کہ 40 میٹر لمبا اور 15 میٹر چوڑا ہے اس کے فرش پر 5 میٹر × 6 میٹر کے سائز میں پتھر کی کتنی ٹائلیں لگیں گی؟

-2 18 میٹر × 28 میٹر کے گھاس والے پلاٹ کے گرد 1 میٹر چوڑے راستے پر 40 مربع سینٹی میٹر کی کتنی ٹائلیں لگیں گی؟

-3 ایک کمرہ جو کہ 5.49 میٹر لمبا اور 3.87 میٹر چوڑا ہے کا رقبہ معلوم کریں۔ اس کمرہ میں بحساب 10.50 روپے فی مربع میٹر قالین بچھانے کا کتنا خرچ آئے گا؟

-4 ایک چاول کے کھیت کا رقبہ 2.5 ہیکٹر ہے۔ جبکہ اس کے اضلاع میں 3:2 کی نسبت ہے کھیت کا احاطہ معلوم کریں۔

-5 ایک مربع گراؤنڈ کا رقبہ 4500 مربع میٹر ہے۔ ایک آدمی کو 3 کلومیٹر فی گھنٹا کی رفتار سے اس کے وتر کے راستے گزرنے میں کتنی دیر لگے گی؟

-6 مربع کا وتر 14 سینٹی میٹر لمبا ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

-7 ایک مثلث جس کے اضلاع دیے گئے ہیں، اس کا رقبہ معلوم کریں۔

(i) 120 سینٹی میٹر، 150 سینٹی میٹر اور 200 سینٹی میٹر

(ii) 50 ڈیسی میٹر، 78 ڈیسی میٹر اور 112 ڈیسی میٹر

-8 ایک مثلثی علاقے کا احاطہ 540 میٹر ہے اور اس کے اضلاع میں 25:17:12 کی نسبت ہے۔ مثلث کا رقبہ معلوم کریں۔

اشارہ: فرض کیا اضلاع $25x, 17x, 12x$ ہوں تو

$$25x + 17x + 12x = 540 \Rightarrow 54x = 540 \Rightarrow x = 10$$

لہٰذا اضلاع کی مقداریں 120 میٹر، 170 میٹر اور 250 میٹر

-9 ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ معلوم کریں جس کے دو متصلہ اضلاع 12 سینٹی میٹر اور 14 سینٹی میٹر ہیں اور اس کے وتر کی لمبائی 18 سینٹی میٹر ہے۔

اشارے: فرض کیا $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں $m\overline{AB} = 12$ سینٹی میٹر، $m\overline{BC} = 14$ سینٹی میٹر اور $m\overline{AC} = 18$ سینٹی میٹر ΔABC کا رقبہ معلوم کیجیے۔

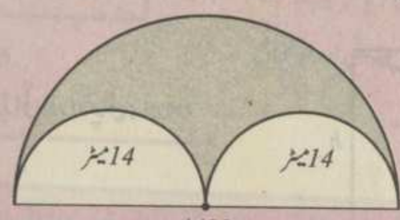
متوازی الاضلاع کا رقبہ = 2 (ΔABC کا رقبہ)

10- نیچے دی گئی واشلوں کا رقبہ معلوم کریں جس کے اندرونی اور بیرونی قطر دیے گئے ہیں۔

(i) 15 سینٹی میٹر اور 13 سینٹی میٹر　　*(ii)* 0.9 میٹر اور 1.2 میٹر

(iii) 40 ملی میٹر اور 33 ملی میٹر

11- سایہ دار حصہ کا رقبہ معلوم کریں۔



12- مساوی الاضلاع مثلث جس کا ضلع 8 میٹر ہے، کا رقبہ معلوم کریں۔

13- مساوی الاضلاع مثلث کا ضلع 6 سینٹی میٹر ہے۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

14- قائمۃ الزاویہ مثلث کا رقبہ معلوم کریں جس کے دو اضلاع 12 سینٹی میٹر اور 35 سینٹی میٹر ہیں۔

15- ایک مستطیل کا قاعدہ اس کے ارتفاع کا تین گنا ہے جبکہ اس کا رقبہ 147 مربع سینٹی میٹر ہے۔ قاعدہ اور ارتفاع معلوم کریں۔

16- اس متوازی الاضلاع کا قاعدہ معلوم کریں جس کے ارتفاع کی لمبائی 18 سینٹی میٹر اور رقبہ 3 مربع میٹر ہے۔

17- ایک متوازی الاضلاع کا رقبہ 144 مربع سینٹی میٹر ہے۔ اس کا ارتفاع معلوم کریں اگر اس کے قاعدہ کی لمبائی 2 سینٹی میٹر ہو۔

18- اس مستطیل کا رقبہ معلوم کریں جس کی لمبائی 2 میٹر اور چوڑائی 18 سینٹی میٹر ہے۔

19- ایک مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ $4\sqrt{3}$ مربع سینٹی میٹر ہے۔ اس کے ضلع کی لمبائی معلوم کریں۔

9.3 حجم VOLUMES

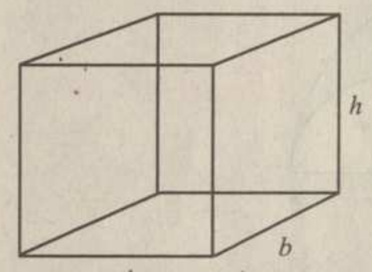
اس عنوان کے تحت ایسی اشکال کا مطالعہ کریں گے جو کہ مستوی سطح نہیں ہوتیں۔ اس کی سادہ ترین شکل مکعب یا مکعب نما ہے۔ یہ اشکال مکمل طور پر مستوی میں واقع نہیں ہوتیں۔ یہ اشکال ٹھوس (تین پہلو والی) کہلاتی ہیں۔

مکعب، مکعب نما Cube and Cuboid

مکعب: Cube

ایک 6 پہلو شکل جس کی لمبائی چوڑائی اور اونچائی برابر ہو، مکعب کہلاتی ہے۔

دی گئی شکل مکعب کی ہے۔



شکل (i)

$= \ell$ مکعب کی لمبائی

$= b$ مکعب کی چوڑائی

$= h$ مکعب کی اونچائی

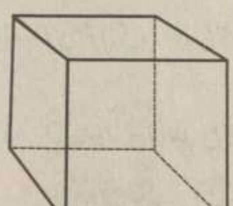
جبکہ $\ell = b = h$

لہٰذا

مکعب کا حجم $= V = \ell \times \ell \times \ell$
یا $V = \ell^3$ مکعب اکائیاں

مثال:-

ایسے مکعب کا حجم معلوم کریں جس کا ہر کنارا 8 میٹر ہو۔



حل:

مکعب کا کنارا $= 8$ میٹر

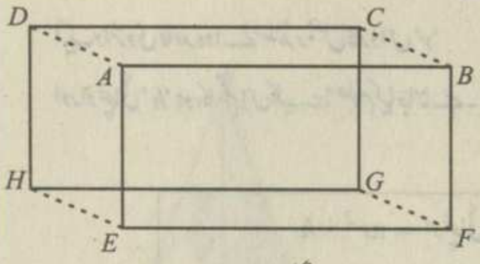
حجم $= \ell^3$

$V = 8 \times 8 \times 8 = 8^3$

$V = 512$ مکعب میٹر

اطراف:	لمبائی کی ایک طرف ہوتی ہے۔
	رقبہ کی دو اطراف ہوتی ہیں۔
	حجم کی تین اطراف ہوتی ہیں۔

مکعب نما Cuboid



شکل (ii)

ایک چھ پہلو شکل جس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی ہو، مکعب نما کہلاتی ہے۔ (یا مستطیلی متوازی الاضلاعی پائپ نما) شکل (ii) مکعب نما کو ظاہر کرتی ہے۔

مکعب نما کی لمبائی چوڑائی اور اونچائی کو بالترتیب l, b اور h سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ لمبائی، چوڑائی اور اونچائی مکعب نما کی اطراف بھی کہلاتی ہیں۔

ایک مکعب نما کا حجم V سے ظاہر کیا جاتا ہے جس کی لمبائی ℓ، چوڑائی b اور اونچائی h ہو۔

$$V = \ell \times b \times h$$

مثال:-

لکڑی کے بلاک کا حجم معلوم کریں جس کی لمبائی، چوڑائی اور اونچائی بالترتیب 10 سینٹی میٹر 5 سینٹی میٹر اور 3 سینٹی میٹر ہیں۔

حل: دیا گیا ہے

لکڑی کے بلاک کی لمبائی = 10 سینٹی میٹر

لکڑی کے بلاک کی چوڑائی = 5 سینٹی میٹر

لکڑی کے بلاک کی اونچائی = 3 سینٹی میٹر

$V = \ell \times b \times h$

$= 10 \times 5 \times 3$

$= 150$ مکعب سینٹی میٹر

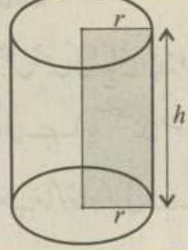
مکعب اور مکعب نما کا حجم:

1- لمبائی، چوڑائی اور اونچائی ایک ہی اکائی میں ہونے چاہئیں۔

2- درج بالا کلیہ سے ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ

اونچائی $h = \dfrac{v}{\ell \times b}$	چوڑائی $b = \dfrac{v}{\ell \times h}$	لمبائی $\ell = \dfrac{v}{b \times h}$

ایک عمودی دائروی سلنڈر کا حجم
Volume of Right Circular Cylinder



ایک دائروی قاعدہ والے سلنڈر جس کا رداس 'r'
اور اونچائی 'h' ہو، کا حجم اِس کلیہ سے معلوم کیا جاتا ہے۔

$$\text{سلنڈر کا حجم} = \text{قاعدہ کا رقبہ} \times \text{اونچائی} = \pi r^2 \times h$$
$$\text{حجم} = \pi r^2 h$$

مثال:-

سلنڈر کا حجم 12320 مکعب سینٹی میٹر اور اونچائی 20 سینٹی میٹر ہے، سلنڈر کا رداس معلوم کریں۔

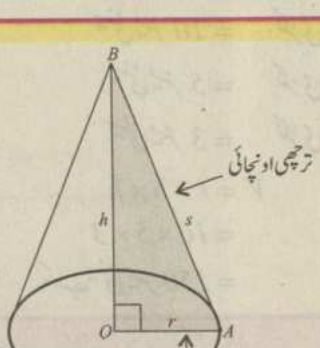
حل: دیا گیا ہے $v = 12320$ مکعب سینٹی میٹر، $h = 20$ سینٹی میٹر، $r = ?$

$$v = \pi \times r^2 \times h \Rightarrow r^2 = \frac{v}{\pi h}$$

$$r^2 = \frac{12320}{\frac{22}{7} \times 20} = \frac{12320 \times 7}{22 \times 20} = \frac{616 \times 7}{22} = 196$$

$r = 14$ سینٹی میٹر

عمودی دائروی کون (مخروط) Right Circular Cone



شکل (i)

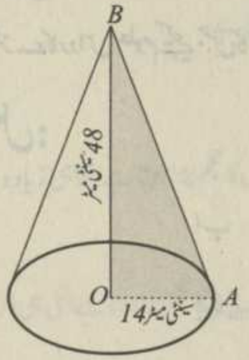
کون Cone ایک ٹھوس مستوی قوس نما سطح ہوتی ہے جس کو قاعدہ کہتے ہیں اور مستوی سے اوپر ایک کونا جس کو کون کا راس کہتے ہیں نکلا ہوتا ہے۔ ایک عمودی دائروی کون، ایک قائمۃ الزاویہ مثلث BOA (شکل (i)) میں دکھایا گیا ہے کو $\overline{OB}$ کے گرد گھما کر حاصل کیا جاتا ہے۔
کون کا قاعدہ ایک دائرہ جس کا رداس OA بنتا ہے۔
B کون کا راس ہے اور $\overline{BA}$ ترچھا ضلع ہے۔

$$\text{کون کا حجم} = \frac{1}{3} \times \text{قاعدہ کا رقبہ} \times \text{ارتفاع}$$

$$\text{کون کا حجم} = v = \frac{1}{3}\pi \times r^2 \times h$$

مثال :-

ایک مخروط (کون) جس کے دائروی قاعدہ کا رداس 14 سینٹی میٹر ہے اور اس کا ارتفاع 48 سینٹی میٹر ہے۔
مخروط کا حجم معلوم کیجیے۔ (π کی قیمت $\frac{22}{7}$ لیجیے۔)



حل: دیا گیا ہے کہ

قاعدہ کا رداس $= r = 14$ سینٹی میٹر

مخروط کا ارتفاع $= h = 48$ سینٹی میٹر

مخروط کا حجم $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

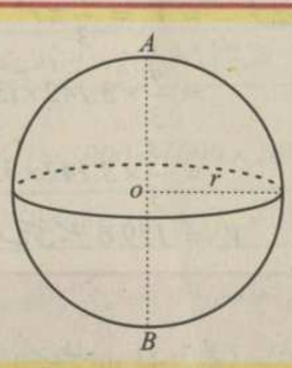
$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (14)^2 \times 48$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 196 \times 48$

$= 9856$ مکعب سینٹی میٹر

کرہ Sphere

کرہ ایک سطح سے گھرا ہوا ایسا جسم ہوتا ہے جس پر ہر نقطہ اس کے اندر ایک معین نقطہ سے برابر فاصلہ پر ہوتا ہے۔ معین نقطہ کو کرہ کا مرکز کہتے ہیں۔ معین نقطہ (مرکز) سے کرہ کی سطح پر موجود نقاط کا فاصلہ کرے کا رداس کہلاتا ہے جسے عموماً 'r' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



کرے کا حجم $= \frac{2}{3} \times 2\pi r^3$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ جبکہ r کرے کا رداس کہلاتا ہے۔

نصف کرہ **Hemisphere**

اگر کرّے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جائے تو ہر حصہ نصف کرہ کہلاتا ہے۔

مثال 1:-

کرّے کا رداس معلوم کیجیے جس کا حجم 850 مکعب میٹر ہے۔ جبکہ π کی قیمت $\frac{22}{7}$ ہے۔

حل:

کرّے کا حجم = 850 مکعب میٹر

رداس = ?

اب $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

چونکہ $r^3 = \frac{3V}{4\pi}$

$$\Rightarrow r^3 = \frac{3 \times 850 \times 7}{4 \times 22}$$

$$\Rightarrow r^3 = 202.8409$$

$$\Rightarrow r = (202.8409)^{\frac{1}{3}}$$

$= 5.88$ میٹر

مثال 2:-

کرّے کا حجم معلوم کریں جس کا رداس 3.5 سینٹی میٹر ہے۔

حل:

کرّے کا رداس $= r = 3.5$ سینٹی میٹر

کرّے کا حجم $= V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3} \times 3.142 \times (3.5)^3$$

$$= \frac{4}{3} \times 3.142 \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5$$

$V = 179.6$ مکعب سینٹی میٹر

حجم کی کچھ معیاری اکائیاں:

اگر ہم 1 سینٹی میٹر، 1 ملی میٹر یا 1 میٹر ضلع والے مکعب کو حجم کی پیائش کرنے کے لیے معیار مقرر کریں تو حجم کی اکائیاں ہوں گی

مکعب سینٹی میٹر

مکعب ملی میٹر

مکعب میٹر

حجم کے متعلقہ روزمرہ زندگی سے مسائل Real Life Problems Related to Volume

ایک ٹھوس شے کی جسامت کی مقدار کی پیمائش ہوتی ہے۔ٹھوس شے کی جسامت کی اس مقدار کو حجم کہتے ہیں۔
دوسرے لفظوں میں اس جگہ شے یا خلا کی پیمائش جو ٹھوس جسم گھیرتا ہے، اس کا حجم کہلاتی ہے۔

مثال کے طور پر حقیقی زندگی کے متعلقہ مسائل کو لیتے ہیں۔

1. ایک مکعب نما اونچا پانی جمع کرنے کے لیے ٹینک بنایا جاتا ہے۔ جتنا اس کا حجم بڑا ہوتا ہے اتنا ہی زیادہ پانی اس میں جمع کیا جا سکتا ہے۔
2. ایک مکعب نما ٹین کا ڈبہ تیل جمع کرنے کے لیے بنایا جاتا ہے۔ جتنا اس مکعب نما کا حجم بڑا ہوتا ہے اتنی ہی اس میں تیل جمع کرنے کی صلاحیت زیادہ ہوتی ہے۔

یاد رکھیے کہ:

-1 چونکہ 1 سینٹی میٹر $= 10$ ملی میٹر

لہٰذا 1 مکعب سینٹی میٹر $= 10 \times 10 \times 10$ مکعب ملی میٹر

1 مکعب سینٹی میٹر $= 1000$ مکعب ملی میٹر

-2 1 مکعب میٹر $= 100 \times 100 \times 100$ مکعب سینٹی میٹر

$= 1000000$ مکعب سینٹی میٹر

یا 1 مکعب میٹر $= 10^6$ مکعب سینٹی میٹر

1 مکعب میٹر $= 1000 \times 1000 \times 1000$ مکعب ملی میٹر

1 مکعب میٹر $= 10^9$ مکعب ملی میٹر

-3 مائعات کا حجم ماپنے کے لیے ہم اکائیاں لٹر (ℓ) یا ملی لٹر $(m\ell)$ استعمال کرتے ہیں۔

1 مکعب سینٹی میٹر $= 1$ ملی لٹر

اور 1000 مکعب سینٹی میٹر $= 1$ لٹر

1 مکعب میٹر $= 1000000$ مکعب سینٹی میٹر $= 1000$ لٹر

1 مکعب میٹر $= 1k\ell$ (1 کلو لٹر)

مثال 1:-

ایک ٹینک جس کی لمبائی، چوڑائی اور گہرائی بالترتیب 6.3 میٹر، 4.5 میٹر اور 3.6 میٹر ہے، کا حجم (گنجائش) لٹر میں معلوم کریں۔

حل:

ٹینک کی لمبائی $= 6.3$ میٹر

ٹینک کی چوڑائی $= 4.5$ میٹر

ٹینک کی گہرائی $= 3.6$ میٹر

ٹینک کا حجم $= \ell \times b \times h = 6.3 \times 4.5 \times 3.6$ مکعب میٹر

$= 102.06$ مکعب میٹر

یا

ٹینک کا حجم $= 102.06 \times 100 \times 100 \times 100$

$= 102060000$ مکعب سینٹی میٹر

$= 102060$ لٹر (∵ 1000 مکعب سینٹی میٹر = 1 لٹر)

مثال 2:-

ایک ٹینک کی گنجائش 60 کلو لٹر ہے۔ اگر ٹینک کی لمبائی اور چوڑائی بالترتیب 5 میٹر اور 4 میٹر ہو تو اس کی گہرائی معلوم کریں۔

حل:

ٹینک کا حجم $= 60$ کلو لٹر $= 60000$ لٹر $= 60$ مکعب میٹر

ٹینک کی لمبائی $= 5$ میٹر

ٹینک کی چوڑائی $= 4$ میٹر

اب ٹینک کی گہرائی $= d$

حجم = لمبائی × چوڑائی × گہرائی

پس ٹینک کی گہرائی = حجم / (لمبائی × چوڑائی)

$= \frac{60}{20}$ (∵ 60000 لٹر = 60 مکعب میٹر)

$= 3$ میٹر

مشق 9.3

ٹھوس اجسام کے حجم معلوم کریں۔

-1 ایک مکعب جس کا ضلع (کنارا) 4 سینٹی میٹر ہو۔

-2 ایک مکعب جس کا کل سطحی رقبہ 96 مربع سینٹی میٹر ہو۔

-3 ایک مکعب نما ڈبہ جس کی لمبائی 4 میٹر، چوڑائی 3 میٹر اور اونچائی 2 میٹر ہو۔

-4 ایک عمودی سلنڈر کا، جس کے قاعدہ کا رداس 4 سینٹی میٹر اور ارتفاع 10 سینٹی میٹر ہو۔ π کی قیمت $\frac{22}{7}$ لیجیے۔

-5 ایک دائروی مخروط (کون) کا، جس کے قاعدہ کا رداس 3 سینٹی میٹر اور ارتفاع 10 سینٹی میٹر ہو۔

-6 ایک کرہ کا، جس کا رداس 3 سینٹی میٹر ہو۔

-7 ایک سلنڈر کا، جس کے قاعدہ کا محیط 4 سینٹی میٹر اور لمبائی 1 میٹر ہو۔

-8 ایک مخروط کا، جس کی بلندی 9 سینٹی میٹر اور قاعدہ کا رداس 6 سینٹی میٹر ہو۔

جائزہ مشق -9

I- صحیح جوابات پر دائرہ لگایئے۔

.1 اگر کسی قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کا مربع اس کے باقی دو اضلاع کے مربع کے مجموعہ کے برابر ہو تو یہ کہلاتا ہے:

(a) مسئلہ فیثاغورث (b) غیر مساوی اضلاعی مثلث
(c) مساوی الاضلاع مثلث (d) متساوی الساقین مثلث

.2 ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع کی مقداریں معلوم ہوں اس کے رقبہ کی مقدار ہوتی ہے:

(a) $\frac{1}{2}bh$ (b) bh
(c) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (d) $\frac{a+b+c}{2}$

.3 مساوی الاضلاع مثلث جس کا ضلع 'a' ہو، کا رقبہ ہوتا ہے:

(a) $\frac{1}{2}bh$ (b) bh (c) $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ (d) $\frac{\sqrt{3}a^2}{2}$

جائزہ مشق-9

.4 مستطیل کا رقبہ ہوتا ہے:

(a) $l \times b$ (b) $\frac{1}{2} \times l + b$

(c) $\frac{1}{3} \times l + b$ (d) l^2

.5 ایسا مربع جس کا ضلع 'S' ہو، کا رقبہ ہوتا ہے :

(a) S (b) $4S$ (c) $2S$ (d) S^2

.6 دائرہ جس کا رداس 'r' ہے، کا رقبہ ہوتا ہے:

(a) r^2 (b) $2\pi r$ (c) πr^2 (d) $\pi^2 r$

.7 نصف دائرہ کا رقبہ ہوتا ہے:

(a) $\frac{\pi r^2}{2}$ (b) πr^2 (c) $\pi^2 r$ (d) $2\pi r$

.8 ایک مکعب کا حجم جس کا کنارا 'l' ہو:

(a) l^2 (b) $3l$ (c) l^3 (d) l^4

.9 ایک عمودی دائروی سلنڈر کا حجم ہوتا ہے:

(a) $\frac{\pi r^2 h}{3}$ (b) $\frac{\pi r^2 h}{2}$

(c) $\pi r^2 h$ (d) $\frac{4}{3}\pi r^2$

II- خالی جگہوں کو پر کریں:

.1 اگر قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کا مربع اس کے باقی اضلاع کے مربعوں کے برابر ہو تو اسے مسئلہ __________ کہتے ہیں۔

.2 کسی بند شکل کی چار دیواری میں بند علاقہ __________ کہلاتا ہے۔

.3 مثلث کا رقبہ = __________

.4 کسی مثلث کے لیے ہیرو کلیہ کے مطابق __________ = A

.5 کسی مساوی الاضلاع مثلث جس کے ضلع کی لمبائی 'a' ہو، کا رقبہ = __________ ۔

.6 مستطیل کا رقبہ = __________ ۔

7. دائرہ کا رقبہ = ________________ ۔

8. مکعب جس کے کنارا کی لمبائی 'l' ہو، کا حجم ________________ کے برابر ہوتا ہے۔

9. کسی مکعب نما کا حجم = ________________ ۔

10. عمودی دائروی مخروط (کون) کا حجم = ________________ ۔

خلاصہ SUMMARY

مسئلہ فیثا غورث: کسی قائمۃ الزاویہ مثلث میں وتر کا مربع باقی دونوں اضلاع پر مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

رقبہ: کسی بھی بند شکل کی چار دیواری کے اندر کی جگہ ۔

مثلث کا رقبہ: $A = \frac{1}{2} \times$ قاعدہ $\times$ ارتفاع

مثلث کا رقبہ: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

a, b, c مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہیں: $s = \frac{a+b+c}{2}$

مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ: $A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ جبکہ 'a' مثلث کے ضلع کی لمبائی ہے:

مستطیل کا رقبہ: چوڑائی × لمبائی = A

مربع کا رقبہ: ضلع × ضلع = A

متوازی الاضلاع کا رقبہ: ارتفاع × قاعدہ = A

دائرہ کا رقبہ: $A = \pi r^2$

دائرہ کا محیط: $C = 2\pi r$

نصف دائرہ کا رقبہ: $A = \frac{1}{2}(\pi r^2)$

واشل کا رقبہ: $A = \pi\left[r_1^2 - r_2^2\right]$

جبکہ r_1 بیرونی دائرہ کا رداس

r_2 اندرونی دائرہ کا رداس

حجم: سہ سمتی شکل میں گھرا ہوا علاقہ۔

مکعب کا حجم: $V = \ell^3$ ، ℓ کنارا کی لمبائی ہے۔

مکعب نما کا حجم: $V = \ell \times b \times h$

اونچائی $= h$ ، چوڑائی $= b$ ، لمبائی $= \ell$

عمودی دائروی سلنڈر کا حجم: $V = \pi r^2 h$

سلنڈر کی اونچائی $= h$

قاعدہ کا رداس $= r$

عمودی دائروی مخروط کا حجم: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

مخروط کا ارتفاع $= h$

قاعدہ کا رداس $= r$

کرّے کا حجم: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

نصف کرّہ کا حجم: $V = \frac{2}{3}\pi r^3$

یونٹ

10

INTRODUCTION TO COORDINATE GEOMETRY

محدداتی جیومیٹری کا تعارف

- محدداتی جیومیٹری کا تعارف
- فاصلہ کا کلیہ
- ہم خط نقاط

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

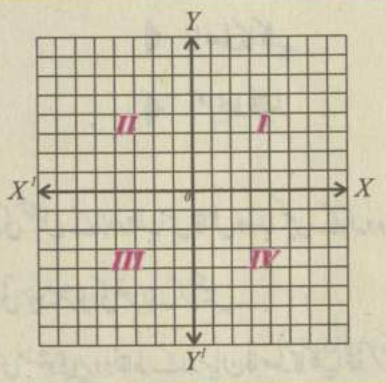
- محدداتی جیومیٹری کی تعریف کر سکیں۔
- کارتیسی مستوی پر دو نقاط کے درمیان فاصلہ کا کلیہ اخذ کر سکیں۔
- فاصلہ کے کلیہ کے استعمال سے دو نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کر سکیں۔
- ہم خط نقاط کی تعریف کر سکیں۔
- ہم خط اور غیر ہم خط نقاط کا فرق کر لیں۔
- فاصلہ کے کلیہ کے استعمال سے تین یا زیادہ نقاط کا بتا سکیں کہ آیا وہ ہم خط ہیں یا نہیں۔
- فاصلہ کے کلیہ کے استعمال سے بتا سکیں کہ دیے گئے تین نقاط سے بنتی ہے۔
  - ایک مساوی الاضلاع مثلث
  - ایک متساوی الساقین مثلث
  - ایک قائمۃ الزاویہ مثلث
  - ایک غیر مساوی الاضلاع مثلث

10.1 فاصلہ کا کلیہ DISTANCE FORMULA

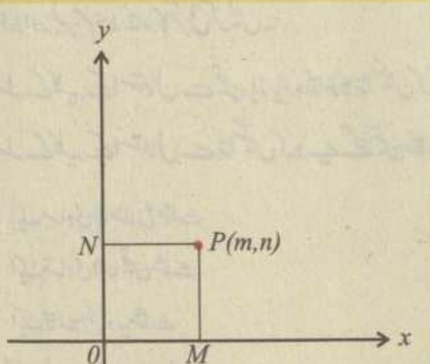
سترہویں صدی میں فرانسیسی ریاضی دان ڈسکارٹ نے ایک مستوی کا تصور پیش کیا۔ لامحدود نقاط کا سیٹ کارتیسی مستوی کہلاتی ہے۔ مستوی کا ہر نقطہ اعداد کے ایک جوڑے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ان اعداد کی قیمت مستوی میں دو ایک دوسرے کے عمود اُمتقاطع خطوط کی مناسبت سے لی جاتی ہے۔ اِن کا نقطہ تقاطع ان خطوط کا مبداء کہلاتا ہے۔

مستوی کارتیسی مستوی کہلاتی ہے اور محوروں میں ایک افقی محدد $(\overline{XOX'})$ اور دوسرا عمودی محور $(\overline{YOY'})$ کہلاتا ہے۔ یا x- محور اور y- محور کہلاتے ہیں۔

X اور Y محور عددی مستوی کو چار I, II, III, IV ربعوں میں تقسیم کرتے ہیں جیسا کہ شکل میں دکھایا گیا ہے۔



اگر P مستوی کا نقطہ ہو اور P میں سے گزرتے ہوئے محوروں کے متوازی خطوط کھینچے جائیں تو یہ محوروں کو نقاط M اور N پر ملتے ہیں۔ x- محور پر نقطہ M کا محدد $M\ (m)$ جو کہ P کا x- محدد یا ایبسیسا (abscissa) کہلاتا ہے اور N کا y- محور پر محدد $Y, N(n)$ محدد یا آرڈینیٹ (Ordinate) کہلاتا ہے۔



مترتب جوڑے (m,n) کے اعداد P کے محددات کہلاتے ہیں۔ صرف m اور n عددی قیمتوں کی جگہ لیے گئے ہیں۔ چونکہ جوڑے میں پہلے x- محدد کی قیمت اور بعد میں y- محدد کی قیمت لکھی جاتی ہے۔ لہٰذا ایسا جوڑا مترتب جوڑا کہلاتا ہے یعنی کہ جوڑا $(3,2)$ اور $(2,3)$ برابر نہیں ہو سکتے۔

یادرکھیے کہ:

(i) مستوی کا ہر نقطہ اعداد کے منفرد جوڑے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

(ii) اعداد کے ہر جوڑے سے مستوی کا منفرد نقطہ حاصل ہوتا ہے۔

چونکہ مبداء کے دائیں جانب افقی محور پر اور مبداء کے اوپر کی جانب عمودی محور پر اعداد کو مثبت لیا جاتا ہے۔

(i) لہٰذا I ربع میں واقع نقطہ کی یہ خاصیت ہوتی ہے کہ اس کے دونوں محددات مثبت ہوتے ہیں۔

(ii) II ربع میں واقع نقطہ کا ایبسیسا منفی اور آرڈینیٹ مثبت ہوتا ہے۔

(iii) III ربع میں واقع نقطہ کے دونوں محددات منفی ہوتے ہیں۔

(iv) IV ربع میں واقع نقطہ کا ایبسیسا مثبت اور آرڈینیٹ منفی ہوتا ہے۔

(v) محور پر واقع نقاط کسی بھی ربع میں شامل نہیں ہوتے۔

(vi) مثبت x– محور کے نقطہ کا ایبسیسا مثبت اور آرڈینیٹ کی قیمت صفر ہوتی ہے۔

(vii) منفی x– محور کے نقطہ کا ایبسیسا منفی اور آرڈینیٹ کی قیمت صفر ہوتی ہے۔

(viii) مثبت y– محور پر آرڈینیٹ مثبت جبکہ ایبسیسا کی قیمت صفر ہوتی ہے۔

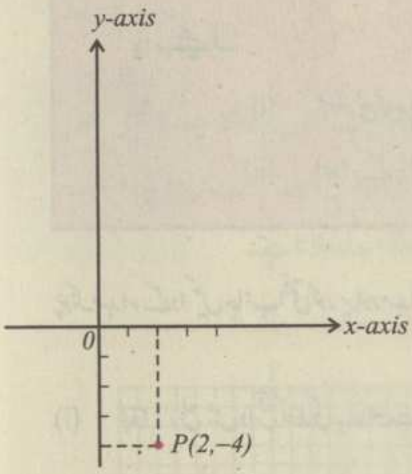
(ix) منفی y- محور پر آرڈینیٹ منفی جبکہ ایبسیسا کی قیمت صفر ہوتی ہے۔

(x) مبداء کے محددات $(0,0)$ ہوتے ہیں۔

مثال 1:-

$(2,-4)$ کو محددی مستوی پر ظاہر کریں۔

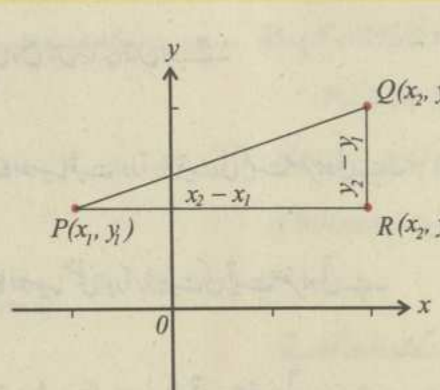
حل:



اس سوال میں ابیسیسا مثبت ہے۔ لہٰذا یہ مبداء کی دائیں طرف ظاہر ہوگا اور آرڈینیٹ منفی ہے جو کہ مبداء کی نچلی جانب ظاہر ہوگا۔ لہٰذا دیا گیا نقطہ P شکل میں ظاہر کیا گیا ہے۔

10.1.2 دو نقاط کے درمیان فاصلہ Distance Between Two Points

نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کو کارتیسی مستوی کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ قطعہ $\overline{PQ}$ کی لمبائی معلوم کرنے کے لیے ہم قائمۃ الزاویہ مثلث PQR کے لیے P سے $\overline{PR}$ متوازی x-محور اور Q سے $\overline{QR}$ متوازی y-محور خطوط کھینچتے ہیں۔ دونوں خطوط R پر ملتے ہیں۔



مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$\left|\overline{PQ}\right|^2 = \left|\overline{PR}\right|^2 + \left|\overline{RQ}\right|^2$$

$$\overline{|PQ|}^2 = |(x_2 - x_1)|^2 + |(y_2 - y_1)|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

پس $\overline{|PQ|} = \pm \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

چونکہ ہم صرف قطعہ کی لمبائی میں دلچسپی رکھتے ہیں اور اس کی سمت سے غرض نہیں ہے لہٰذا ہم صرف اِس کی مثبت علامت رکھتے ہیں۔

لہٰذا دو نقاط $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ کے درمیان فاصلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$d = \overline{|PQ|} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

10.1.3 فاصلے کے کلیہ کا استعمال Use of Distance Formula

مثال 1:-

درج ذیل راس کس قسم کے مثلث کے ہیں؟ $A(6,-2), B(1,-2), C(-2,2)$

حل:

دیے گئے نقاط $A(6,-2)$ ، $B(1,-2)$ اور $C(-2,2)$ ہیں۔ فاصلہ کا کلیہ لگانے سے:

$$\overline{|AB|} = \sqrt{(1-6)^2 + (-2+2)^2} = \sqrt{5^2 + 0} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{|AC|} = \sqrt{(-2-6)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$\overline{|BC|} = \sqrt{(-2-1)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

چونکہ $\overline{|AB|} = \overline{|BC|} = 5$

پس مثلث ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔

مثال 2:-

$A(2, 3)$ کا $P(x, y)$ سے فاصلہ، $P(x, y)$ سے $B(3, 4)$ کے فاصلہ کے دوگنا کے برابر ہو تو اس تعلق کو مساوات سے بیان کیجیے۔

حل:

بتایا گیا ہے کہ $A(2,3)$ ، $B(3,4)$ اور $P(x,y)$ جبکہ $P(x,y)$ کوئی سا نقطہ ہے۔ سوال کی شرط کے مطابق:

فاصلہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے

$$\overline{|AP|} = 2\,\overline{|BP|}$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} = 2\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

دونوں طرف مربع اُٹھانے سے

$$(x-2)^2+(y-3)^2 = 4\left[(x-3)^2+(y-4)^2\right]$$

$$x^2-4x+4+y^2-6y+9 = 4\left[x^2-6x+9+y^2-8y+16\right]$$

$$x^2+y^2-4x-6y+13 = 4x^2+4y^2-24x-32y+100$$

$$3x^2+3y^2-20x-26y+87=0$$

مثال 3:-

مثلث کے راس $A(1,1)$ ، $B(5,5)$ اور $C(9,1)$ ہوں تو ثابت کریں کہ یہ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

حل:

چونکہ $A(1,1)$ ، $B(5,5)$ اور $C(9,1)$ ہیں۔ فاصلہ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے:

$$\overline{|AB|} = \sqrt{(5-1)^2+(5-1)^2} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32}$$

$$\overline{|AC|} = \sqrt{(9-1)^2+(1-1)^2} = \sqrt{8^2} = \sqrt{64}$$

$$\overline{|BC|} = \sqrt{(9-5)^2+(1-5)^2} = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32}$$

مسئلہ فیثاغورث کی رو سے

$$\overline{|AB|}^2 + \overline{|BC|}^2 = 32 + 32$$

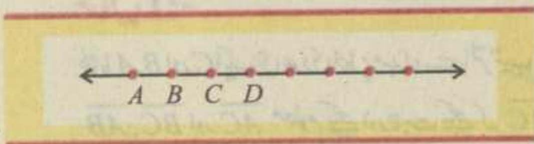
$$= 64$$

$$= \overline{|AC|}^2$$

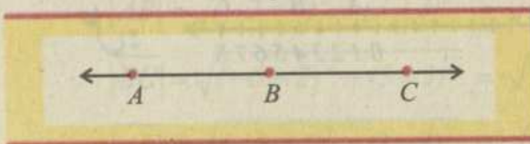
پس ΔABC ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

10.2 ہم خط نقاط COLLINEAR POINTS

10.2.1 ہم خط نقاط



شکل (i)



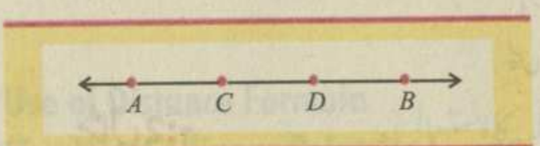
شکل (ii)

ہم خط نقاط ایسے نقاط ہوتے ہیں جو کہ ایسے نقاط کے سیٹ کے رکن ہوں جس سے خط مستقیم بنتا ہو۔

شکل (i) میں ..... A,B,C,D ہم خط نقاط ہیں۔

اگر تین نقاط ہم خط ہوں تو ان میں سے ایک نقطہ باقی دو نقاط کے درمیان ہوگا شکل (ii) میں B ایسا نقطہ ہے جو نقاط A اور C کے درمیان واقع ہے۔ $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = |\overline{AC}|$

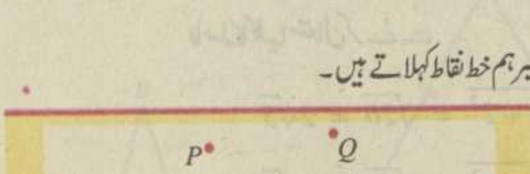
10.2.2 ہم خط اور غیر ہم خط نقاط Collinear and Non Collinear Points



ایک قطعہ خط، خط مستقیم کا ایک ایسا تحتی سیٹ ہوتا ہے جس میں اُس کے دونوں انتہائی نقاط اور دونوں نقاط کے درمیان لامحدود نقاط شامل ہوتے ہیں۔

شکل میں $\overline{CD}$ ایک قطعہ خط ہے جو کہ خط مستقیم AB (یا $\overleftrightarrow{AB}$) کا تحتی سیٹ ہے۔ نقاط C اور D خط مستقیم AB پر واقع ہے۔ لہٰذا ہم خط ہیں۔

تین یا تین سے زیادہ نقاط جو ایک ہی خط مستقیم پر واقع نہ ہوں غیر ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔



شکل میں نقاط P، Q، R غیر ہم نقاط ہیں۔

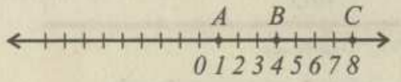
> **یاد رکھیے کہ:**
> شکل میں نقاط P، Q، R غیر ہم خط نقاط ہیں۔
> (i) دو نقاط ہمیشہ ہم خط ہوتے ہیں۔
> (ii) تین نقاط ہم خط بھی ہو سکتے ہیں اور نہیں بھی۔

10.2.3 تین نقاط کا ہم خط ہونا Collinearity of Three Points

مثال 1:-

نقاط A, B اور C ایک ہی عددی خط پر مبداء سے بالترتیب 1، 4، 8 یونٹ کے فاصلہ پر ہیں۔
$\overline{AB}, \overline{BC}$ اور $\overline{AC}$ معلوم کیجیے اور ثابت کیجیے کہ $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

حل:



$$|\overline{AB}| = 4 - 1$$
$$|\overline{AB}| = 3$$
$$|\overline{BC}| = 8 - 4 = 4$$
$$|\overline{AC}| = 8 - 1 = 7$$

اب $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 3 + 4$
$$= 7 = |\overline{AC}|$$

پس $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = |\overline{AC}|$

مثال 2:-

ثابت کیجیے کہ نقاط $A(1,4)$ ، $B(5,6)$ اور $C(9,8)$ ہم خط ہیں۔

حل: بتایا گیا ہے کہ $A(1,4)$, $B(5,6)$ اور $C(9,8)$

فاصلہ کا کلیہ استعمال کرنے سے

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(5-1)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$|\overline{BC}| = \sqrt{(9-5)^2 + (8-6)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$|\overline{AC}| = \sqrt{(9-1)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

اب $|\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$
$$= 4\sqrt{5}$$
$$= |\overline{AC}|$$

پس نقاط A ، B اور C ہم خط ہیں۔

مثال 3:- ثابت کیجئے کہ نقاط $A(4,3)$، $B(-2,3)$ اور $C(-6,3)$ ہم خط ہیں۔

حل:

بتایا گیا ہے کہ $A(4,3)$، $B(-2,3)$ اور $C(-6,3)$ ہیں۔

فاصلہ کا کلیہ استعمال کرنے سے

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-2-4)^2+(3-3)^2} = \sqrt{36+0} = 6$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(-6-2)^2+(3-3)^2} = \sqrt{16+0} = 4$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-6-4)^2+(3-3)^2} = \sqrt{100} = 10$$

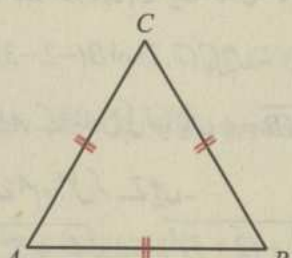
$$\text{Now}\quad |\overline{AB}| + |\overline{BC}| = 6+4 = 10 = |\overline{AC}|$$

پس نقاط A، B اور C ہم خط ہیں۔

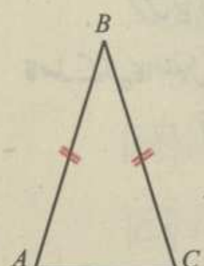
10.2.4 (غیر ہم خط نقاط) میں فاصلے کے کلیہ کا استعمال
Use of Distance Formula (For Non Collinear Points)

ہم فاصلہ کے کلیہ کا استعمال کر کے فیصلہ کرتے ہیں کہ تین غیر ہم خط نقاط بناتے ہیں۔

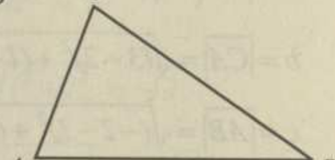
- ایک قائمۃ الزاویہ مثلث
- ایک متساوی الساقین مثلث
- ایک مساوی الاضلاع مثلث
- ایک غیر مساوی الاضلاع مثلث



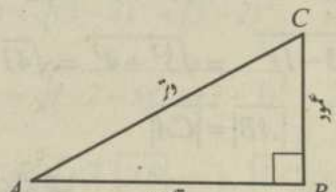
مساوی الاضلاع مثلث



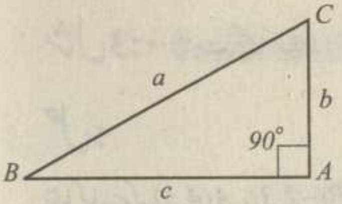
مساوی الساقین مثلث



غیر مساوی الاضلاع مثلث



قائمہ زاویہ مثلث



مثال 1:- ثابت کیجیے کہ نقاط $A(-1,2)$ ، $B(7,5)$ اور $C(2,-6)$ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

حل:

دیا گیا ہے کہ فرض کریں کہ c,b,a مثلث ABC کے اضلاع $\overline{BC}$ ، $\overline{CA}$ اور $\overline{AB}$ کی بالترتیب لمبائیاں ہیں۔

فاصلہ کے فارمولا کا استعمال کرتے ہوئے $|\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$a = |\overline{BC}| = \sqrt{(2-7)^2 + (-6-5)^2} = \sqrt{5^2 + 11^2} = \sqrt{146}$$

$$b = |\overline{CA}| = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$$

$$c = |\overline{AB}| = \sqrt{(7-(-1))^2 + (+5-2)^2} = \sqrt{(8)^2 + (3)^2} = \sqrt{64+9} = \sqrt{73}$$

چونکہ $= c^2 + b^2$

$$= 73 + 73 = 146$$

$$= |\overline{BC}|^2$$

یعنی $m\angle A = 90°$ ، پس ΔABC ایک قائمۃ الزاویہ مثلث ہے۔

مثال 2:-

ثابت کیجیے کہ نقاط $A(3,1)$ ، $B(-2,-3)$ اور $C(2,2)$ ایک متساوی الساقین مثلث کے راس ہیں۔

حل: دیا گیا ہے کہ $A(3,1)$ ، $B(-2,-3)$ اور $C(2,2)$ ہیں۔

فرض کیا کہ مثلث ABC کے اضلاع کی لمبائیاں $\overline{AB} = c$ ، $\overline{BC} = a$ اور $\overline{CA} = b$ ہیں۔

فاصلہ کے کلیہ کا استعمال کرتے ہوئے ہم حاصل کرتے ہیں۔

$$a = |\overline{BC}| = \sqrt{(2-(-2))^2 + (2+3)^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$b = |\overline{CA}| = \sqrt{(3-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$c = |\overline{AB}| = \sqrt{(-2-3)^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

$$|\overline{AB}| = |\overline{CA}|$$

$$\Rightarrow c = a = \sqrt{41}$$

یعنی دو اضلاع لمبائی میں برابر ہیں

پس ΔABC ایک متساوی الساقین مثلث ہے۔

مثال 3:-

ثابت کیجیے کہ نقاط $A(-3,0)$ ، $B(3,0)$ اور $C(0,3\sqrt{3})$ ایک مساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

حل: چونکہ $A(-3,0)$، $B(3,0)$ اور $C(0,3\sqrt{3})$ ہیں۔

فاصلہ کا کلیہ استعمال کرنے سے

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-3-3)^2+(0-0)^2} = \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(3-0)^2+(0-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(-3-0)^2+(0-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$$

یہاں $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{AC}| = 6$

یعنی مثلث ABC کے تینوں اضلاع لمبائی میں برابر ہیں۔

لہٰذا ΔABC ایک مساوی الاضلاع مثلث ہے۔

مثال 4:-

ثابت کیجیے کہ نقاط $A(5,3)$ ، $B(-2,2)$ اور $C(4,2)$ ایک مختلف الاضلاع مثلث کے ہیں۔

حل: $A(5,3)$، $B(-2,2)$ اور $C(4,2)$ ہیں۔

فرض کیا کہ ΔABC میں $\overline{BC}=a,\ \overline{CA}=b, \overline{AB}=c$ اضلاع کی لمبائیاں ہیں۔

فاصلہ کا کلیہ استعمال کرنے سے

$$|\overline{BC}| = a = \sqrt{(4+2)^2+(2-2)^2} = \sqrt{6^2} = 6$$

$$|\overline{CA}| = b = \sqrt{(5-4)^2+(3-2)^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\overline{AB}| = c = \sqrt{(-2-5)^2+(2-3)^2} = \sqrt{7^2+1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

چونکہ $|\overline{AB}| = c,\ |\overline{BC}| = a,\ |\overline{CA}| = b$ تمام کی قیمتیں مختلف ہیں

پس ΔABC ایک مختلف الاضلاع مثلث ہے۔

مشق 10.1

-1 محددی مستوی میں درج ذیل نقاط کو ظاہر کیجیے۔

(i) $(1,0)$　(ii) $(0,4)$　(iii) $(-2,4)$　(iv) $(3,6)$
(v) $(-4,0)$　(vi) $(-8,-8)$　(vii) $(7,-5)$　(viii) $(-8,10)$
(ix) $(0,-7)$　(x) $(8,-3)$

-2 درج ذیل نقاط کے درمیان فاصلہ معلوم کیجیے۔

(i) $(2,1)$, $(-4,3)$　(ii) $(-1,3)$, $(-2,-1)$
(iii) $(7,-2)$, $(-2,3)$　(iv) $(a,-b)$, $(b,-a)$

-3 اگر نقطہ $P(x,y)$ دو نقاط $A(2,4)$ اور $B(6,8)$ سے ہم فاصلہ ہو تو اس کو مساوات کی شکل میں لکھیے۔

-4 ثابت کیجیے کہ نقاط $A(5,4)$ ، $B(4,-3)$ اور $C(-2,5)$ نقطہ $D(1,1)$ سے ہم فاصلہ ہیں۔

-5 ایسا نقطہ معلوم کیجیے جو $(2,4)$ اور $(6,8)$ سے یکساں فاصلہ پر اور x محور پر واقع ہو۔
(اشارہ: نقطہ $(x,0)$ لیجیے اور x کی قیمت معلوم کیجیے۔)

-6 ثابت کیجیے کہ نقاط $A(0,2)$ ، $B(3,-2)$ اور $C(0,-2)$ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

-7 ثابت کیجیے کہ نقاط $A(-1,1)$ ، $B(3,2)$ اور $C(7,3)$ کے ہم خط نقاط ہیں۔

-8 ثابت کیجیے کہ نقاط $A(6,1)$ ، $B(2,7)$ اور $C(-6,-7)$ ایک قائمۃ الزاویہ مثلث کے راس ہیں۔

-9 ثابت کیجیے کہ نقاط $A(2,4)$ ، $B(6,2)$ اور $C(4,3)$ ہم خط نقاط ہیں۔

-10 ثابت کیجیے کہ نقاط $A(4,-2)$ ، $B(-2,4)$ اور $C(5,5)$ ایک متساوی الساقین مثلث کے راس ہیں۔

-11 ثابت کیجیے کہ نقاط $A(-2,11)$ ، $B(-6,-3)$ اور $C(4,-9)$ ایک غیر مساوی الاضلاع والی مثلث کے راس ہیں۔

-12 ثابت کیجیے کہ نقاط $A(6,1)$ ، $B(2,7)$ اور $C(-6,7)$ ایک غیر مساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

-13 ثابت کیجیے کہ نقاط $A(0,-3)$ ، $B(0,7)$ اور $C(5\sqrt{3},2)$ ایک مساوی الاضلاع مثلث کے راس ہیں۔

جائزہ مشق-10

I- صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگایئے۔

1. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ کہلاتا ہے۔

(a) فاصلہ کا کلیہ (b) ہم خط نقاط
(c) غیر ہم خط نقاط (d) مساوی نقاط

2. کارتیسی مستوی میں ایک نقطہ کے منفرد مترتب جوڑے کا تعین کرتا ہے۔

(a) سیٹ (b) ایبسیسا (c) اعداد (d) آرڈینیٹ

3. ایک مستوی میں ہر مترتب جوڑے سے منسلک ہوتا ہے:

(a) ایک منفرد نقطہ (b) صفر (c) دو نقاط (d) چار نقاط

4. ایک ہی خط پر واقع نقاط کہلاتے ہیں:

(a) غیر ہم خط (b) ہم نقاط (c) مساوی (d) منطبق

5. ایسے نقاط جو ایک ہی خط پر نہ ہوں کہلاتے ہیں:

(a) غیر ہم خط (b) ہم خط (c) مساوی (d) صفر

6. محور پر موجود نقطہ کسی میں نہیں ہوتا:

(a) مستوی (b) خط (c) ربع (d) دائرہ

7. مبداء کے محددات ہوتے ہیں:

(a) 0 (b) (1,0) (c) (0,0) (d) (0,1)

8. منفی محور پر نقطہ کی منفی ہوتی ہے:

(a) ایبسیسا (b) آرڈینیٹ (c) قیمت (d) کسر

9. چوتھے ربع میں واقع نقطہ کے آرڈینیٹ کی قیمت ہوتی ہے:

(a) مثبت (b) منفی (c) صفر (d) 1

10. پہلے ربع میں واقع نقطہ کی یہ خصوصیت ہوتی ہے کہ اس کے محددات ہوتے ہیں:

(a) صفر (b) مثبت
(c) منفی (d) مثبت اور منفی دونوں

-II خالی جگہوں کو پُر کیجیے۔

1. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ ________ کہلاتا ہے۔

2. کارتیسی مستوی میں ہر نقطہ کے مطابق اعداد کا ________ ہوتا ہے۔

3. مستوی میں ہر مترتب جوڑے کے ساتھ ایک ________ واسطہ ہوتا ہے۔

4. ایک ہی خط پر واقع نقاط ________ کہلاتے ہیں۔

5. نقاط جو ایک ہی خط پر واقع نہ ہوں ________ نقاط کہلاتے ہیں۔

6. محددوں پر موجود نقاط کسی ________ میں واقع نہیں ہوتے۔

7. مبداء کے محددات ________ ہوتے ہیں۔

8. منفی x- محور پر موجود کسی نقطہ کا ابیسیسا منفی ہوتا ہے اور اس کا آرڈینیٹ ________ ہوتا ہے۔

9. چوتھے ربع میں واقع نقطہ کا ابیسیسا مثبت اور آرڈینیٹ ________ ہوتا ہے۔

10. پہلے ربع میں واقع نقطہ کی یہ خصوصیت ہے کہ اس کے دونوں محددات ________ ہوتے ہیں۔

خلاصہ SUMMARY

فاصلہ کا کلیہ: $d = |\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

1- ایک مستوی میں کسی بھی نقطہ کے لیے اعداد کا مترتب جوڑا منفرد ہوتا ہے۔

2- نمبروں کے ہر مترتب جوڑے کو مستوی کے صرف ایک ہی نقطہ سے منسلک کیا جا سکتا ہے۔

ہم خط نقاط: ایک ہی خط پر واقع نقاط ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔

غیر ہم خط نقاط: ایسے نقاط جو ایک ہی خط پر واقع نہ ہوں غیر ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔

جوابات

مشق 1.1

1- 9,8 2- -11 3- 9 4- 11,71 5- 1,0 6- 18.86 7- 804.57 8- 25,1

9- $\frac{2y}{3x^2}$ 10- $\frac{25a}{14b^2}$ 11- $\frac{4a^3b^3}{5a^2+3b}$ 12- $\frac{2m}{3x^5-4m^2x^3}$ 13- $\frac{5}{c+d}$

14- $\frac{x+y}{-3}$ 15- $\frac{2x^3+x^2y-xy^2}{x^3-x^2y+xy^2-y^3}$ 16- $\frac{4x^3-6x^2-4x}{x^3+2x^2-x-2}$ 17- $\frac{3x-1}{x^3-7x-6}$

18- $\frac{2x-3y}{2x+3y}$ 19- $\frac{x-2y}{x^2-y^2}$ 20- $\frac{x-2y}{xy-y^2}$ 21- $\frac{2}{x-1}$

22- $\frac{37x+1}{x^2-12x+27}$ 23- $\frac{x^2-4x+4}{x^2+2x}$ 24- $\frac{-(x+6)}{x+1}$ 25- $\frac{x^3+x^2+20x}{x^2+4x-5}$

26- $\frac{3x+4}{2x+1}$ 27- $\frac{4x^3-x}{2x^2-1}$ 28- $\frac{x}{x^3-2x^2+2x-1}$ 29- $\frac{x}{3x-9}$

30- x 31- 1 32- $x-1$

مشق 1.2

1- $2x^2+8y^2$ 2- $50x^2+18y^2$ 3- $24\ell m$ 4- ℓ^8-m^8 5- $a^3b^3-\frac{1}{a^3b^3}-3ab+\frac{3}{ab}$

6- $4x^2+9y^2+4+12xy+12y+8x$ 7- $8p^3+12p^2q+6pq^2+q^3$

8- $9p^2+q^2+r^2+6pq+2qr+6pr$ 9- $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$

10- $(x+y-1)(x^2+y^2+2xy+x+y+1)$ 11- $(x-y+4)(x^2+y^2-2xy-4x+4y+16)$

12- $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$ 13- $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)$

14- $(2a+b)(2a-b)(4a^2-2ab+b^2)(4a^2+2ab+b^2)$ 15- 4 17- 17,4 18- 14

19- 133 20- 118 21- 20 22- 46

مشق 1.3

1- (i) $\frac{\sqrt{5}}{5}$, (ii) $\frac{7\sqrt{6}}{3}$, (iii) $\frac{\sqrt{42}}{7}$ 2- (i) $3\sqrt{2}$, (ii) $35\sqrt{2}$, (iii) $4\sqrt{15}-6\sqrt{6}-2\sqrt{10}+6$

(iv) $30-6\sqrt{5}+5\sqrt{2}-\sqrt{10}$ (v) $5\sqrt{3}-\sqrt{15}-10+2\sqrt{5}$ (vi) $35+7\sqrt{2}+5\sqrt{3}+\sqrt{6}$

3- (i) $2-\sqrt{3}$ (ii) $\frac{4+\sqrt{5}}{11}$ (iii) $2\sqrt{3}(\sqrt{7}-\sqrt{5})$ (iv) $\frac{x+y-2\sqrt{xy}}{x-y}$

(v) $\frac{105-10\sqrt{7}}{59}$ (vi) $5+2\sqrt{6}$ (vii) $\frac{29(11-3\sqrt{5})}{76}$ (viii) $\frac{3\sqrt{7}-2\sqrt{3}}{3}$

4- (i) $2\sqrt{5}$ (ii) 18 5- (i) $2\sqrt{3}$ (ii) 14 6- (i) $-2\sqrt{2}$ (ii) 10

7- (i) $\frac{24-6\sqrt{2}}{7}$ (ii) $\left(\frac{-18+8\sqrt{2}}{7}\right)$ 8- (i) 40 (ii) 36

9- (i) $\frac{2b^2-a^2+2b\sqrt{b^2-a^2}}{a^2}$ (ii) $\frac{a-\sqrt{a^2-9}}{3}$

جائزہ مشق 1

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

1- b 2- b 3- d 4- c 5- d 6- a 7- d 8- b 9- c 10- a

II- خالی جگہ پر کریں۔

1- ناطق اعداد 2- ناطق جملہ 3- $4ab$ 4- $2(a^2+b^2)$

5- $(a+b)^3$ 6- $(a-b)^3$ 7- a^3-b^3 8- a^3+b^3 9- مقادیراصم 10- 2

مشق 2.1

1- $(x+y)(3a-7b)$ 2- $(a-x)(x+y)$ 3- $(a-3)(a^2+1)$

4- $(x-1)(x^2+x-y)$ 5- $(x+2y)(3a-4b)$ 6- $(a-b)(2a+c)$

7- $(a-b)(a+c)$ 8- $(4-a^3)(2-a)$ 9- $(4x-3a)^2$

10- $(1-7x)^2$ 11- $5(2x-1)^2$ 12- $2ab(a-b)^2$

13- $(x+\frac{1}{2})^2$ 14- $(x-\frac{1}{x})^2$ 15- $5x(x-3)^2$ 16- $(a+b)(a+b+2c)$

جوابات

مشق 2.2

1- $(x+y+a)\ (x+y-a)$
2- $(2a-b-3c)\ (2a+b-3c)$
3- $(x+3a+4b)\ (x+3a-4b)$
4- $(y+x-c)\ (y-x+c)$
5- $(x+y+2xy)\ (x+y-2xy)$
6- $(a-2b-3ac)\ (a-2b+3ac)$
7- $(x-y-a+b)\ (x-y+a-b)$
8- $(y^2+2y+2)\ (y^2-2y+2)$
9- $(z^2+8y^2-4yz)\ (z^2+8y^2+4yz)$
10- $(x^3-6x+18)\ (x^3+6x+18)$
11- $(z^2-3z+4)\ (z^2+3z+4)$
12- $(2x-y)(x-y)(2x+y)(x+y)$

مشق 2.3

1- $(x+4)\ (x+5)$
2- $(x-2)\ (x+7)$
3- $(x-1)\ (x+6)$
4- $(x-3)\ (x-4)$
5- $(x-13)\ (x+12)$
6- $(x-2)\ (x+1)$
7- $(x-15)\ (x+6)$
8- $(a-17)\ (a+5)$
9- $(7-x)\ (x+14)$
10- $(y-19)\ (y+8)$
11- $(x+1)\ (2x+1)$
12- $(x+1)\ (3x+2)$
13- $(x-1)\ (2x+1)$
14- $(2x+3)\ (3x-1)$
15- $(x+2)\ (1-2x)$
16- $(2-x)\ (4+5x)$
17- $(u-2)\ (3u-4)$
18- $(2x-3)\ (5x+4)$
19- $(x-6)\ (5x-2)$
20- $(4x-\sqrt{3})\ (\sqrt{3}x+2)$

مشق 2.4

1- $(2x-y)\ (4x^2+2xy+y^2)$
2- $(3x+1)\ (9x^2-3x+1)$
3- $(1-7x)\ (1+7x+49x^2)$
4- $(ab+8)\ (a^2b^2-8ab+64)$
5- $(3-10y)\ (9+30y+100y^2)$
6- $(3x-4y)\ (9x^2+12xy+16y^2)$
7- $(xy+z)\ (x^2y^2-xyz+z^2)$
8- $(6p-7)\ (36p^2+42p+49)$
9- $(2x-\frac{1}{3})\ (4x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9})$
10- $(a+b)\left[a^2-ab+b^2+1\right]$
11- $(a-b)\left[1-(a^2+ab+b^2)\right]$
12- $x(1-2y)\ (1+2y+4y^2)$
13- $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$

14- $(1-\frac{4p}{q})\ (1+\frac{4p}{q}+\frac{16p^2}{q^2})$

15- $(1+4u)\ (1-4u+16u^2)$

16- $(2x+3y)\ (4x^2+9y^2-6xy-3)$

17- $(z+5)\ (z^2-5z+25)$

18- $(x+y)\ (x^2-xy+y^2)\ (x^6-x^3y^3+y^6)$

19- $(m+n)(m-n)\ (m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2)$

20- $x(2x-a)(2x+a)\ (4x^2+2ax+a^2)(4x^2-2ax+a^2)$

21- $(x-3a)\ (x^2+3ax+9a^2)$

22- $(x+3a)\ (x^2-3ax+9a^2)$

مشق 2.5

1- 3　2- −6　3- −47　4- 0　5- −84　6- جزوضربی ہے　7- جزوضربی ہے　8- نہیں ہے

9- نہیں ہے　10- جزوضربی ہے　11- نہیں ہے　12- جزوضربی ہے　13- جزوضربی ہے　14- نہیں ہے　15- نہیں ہے　16- جزوضربی ہے

17- جزوضربی ہے　18- نہیں ہے　19- $k = 1$　20- $k = 1$

جائزہ مشق 2

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگایئے۔

1- *b*　2- *c*　3- *d*　4- *a*　5- *c*　6- *b*　7- *a*　8- *a*　9- *a*　10- *a*

II- خالی جگہ پر کریں۔

1- ایک　2- دو　3- تین　4- $(x-3)\ (x+3)$　5- $(x+1)\ (x+3)$

6- $(x+2)(x^2-2x+4)$　7- $(x-2)(x^2+2x+4)$　8- 3　9- 11　10- 0

مشق 3.1

1- ab　2- $3qr$　3- $4xy^2z^2$　4- $7ab$　5- $3x^2y^2$

6- $2abc$　7- $x+4$　8- x^2-y^2　9- $t+3$　10- $x-2$

11- $1+x$　12- $x-2$　13- $x+1$　14- $x\ (x+3)$　15- $5abc$

جوابات

مشق 3.2

1- x^2+x-1 2- $2x^2-3x+2$ 3- $2(x-1)$ 4- $x(x+3)$ 5- $(x+1)^2(x-1)$ 6- $(x-2)$

7- $(x-1)$ 8- $(3x-5)$ 9- $(2x+1)$ 10- $(x+3)$

مشق 3.3

1- $420a^4x^4y^4$ 2- $15a^4b^3c^5$ 3- $12abc$ 4- $x^2y^2z^2$

5- $p^2q^2(p-q)(p+q)\,(p^2+pq+q^2)$ 6- $(x+4)(x-4)\,(x^2-4x+16)$

7- $(x-2)(x+3)\,(x+1)(x-1)$ 8- $(y+3)(y-2)\,(y+3)(y-3)$

9- $(1+y)(1-y)\,(1-2y)(y^2-y+1)$ 10- $(x-y)(x+y)\,(x^2+y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

11- $(x+1)\,(x^2-x+1)\,(x^2+x+1)^2$

12- $(x+y)\,(x^2+y^2)\,(x-y)\,(x^2-xy+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$ 13- $(2x+3)\,(x+1)^2\,(x+3)$

14- $x^2(x+3)\,(x-2)\,(x-3)$ 15- $(x+y)^2\,(x+2y)^2$

مشق 3.4

1- $x^2+1\,;\,x^4-1$ 2- $(x^2-4),(x-3)(x^3-x^2-4x+4)$ 3- $2x^2+1\,;\,2x^4-x^2-1$

4- $2x^2-3x-2,\,(3x-1)\,(8x^4-6x^3-15x^2-9x-2)$

5- $(3x^2+8x-3);(2x^2-3x+1)(3x^4+17x^3+27x^2+7x-6)$

6- $(x^2+2x-3);(2x^2-x-5)(2x^4+x^3-20x^2-7x+24)$

7- $(x^3-1)\,;\,(x-1)\,(x^4+x^3-x-1)$ 8- $(x+1)\,;\,(x^3+1)\,(x^4+x^3-x-1)$

9- $x^2-12x+35$ 10- $(6x^2+x-2)$ 11- $x+4$ 12- $x-1$ 13- $x^3-9x^2+26x-24$

14- $x^3-7x^2+16x-12$ 15- $x^4+8x^3+11x^2-32x-60$ 16- x^5-x^4-2x+4

مشق 3.5

1- $\dfrac{2(2a+1)}{a(a+1)(a+2)}$ 2- $\dfrac{2ax+x-3a-6a^2}{(x-2a)(x-3a)}$ 3- $2+a^4$ 4- $\dfrac{1}{x^4+x^2+1}$

5- $\frac{2b^2(a-c)}{(a+b)(b+c)}$ 6- $\frac{6x^3}{x^6-1}$ 7- $\frac{2a^3}{a^2-b^2}$ 8- 1 9- 1 10- 1

11- $\frac{a}{a-b}$ 12- $\frac{a+1}{a+2}$

مشق 3.6

1- $\pm(4x+3y)$ 2- $\pm(x-3)(x-4)(x-5)$ 3- $\pm(x+1)(x+7)(2x-3)$ 4- $\pm(x^2+6x+4)$

5- $\pm(4x^2+16x+11)$ 6- $\pm(x+\frac{1}{x}-5)$ 7- $\pm(t+\frac{1}{t}-2)$ 8- $\pm(x^2+\frac{1}{x^2}-2)$

9- $\pm(2x^2+3x+4)$ 10- $\pm\left(\frac{3x}{2y}-\frac{1}{2}-\frac{2y}{3x}\right)$ 11- $x = 8$ 12- $\ell = 4$, $m = 10$

جائزہ مشق 3

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

1- *a* 2- *c* 3- *c* 4- *a* 5- *b* 6- *a* 7- *c* 8- *c* 9- *a* 10- *a*

II- خالی جگہ پر کریں۔

1- ,, 2- ,, 3- *H.C.F* 4- *L.C.M* 5- *H.C.F* 6- دوسرا جملہ

7- $2x+1$ 8- $x+2$ 9- $2x^2y^3$ 10- $6x^2y^2z$

مشق 4.1

1- (*i*) 8, (*ii*) 80, (*iii*) 11, (*iv*) 2 2- $\frac{5}{2}$ 3- 2 4- -7 5- -2

6- 3 7- 4 8- 4 9- 3 10- {4} 11- {9} 12- {18} 13- {8}

14- { } 15- { } 16- {13, 5} 17- {8} 18- {13} 19- {101} 20- {15}

مشق 4.2

1- ± 9 2- $-1, 7$ 3- $-6, 4$ 4- $-1, 4$ 5- $\frac{5}{3}, \frac{-13}{3}$ 6- $x<7$

7- $x>-3$ 8- $x<-1$ 9- $x<-10$ 10- $x>-\frac{17}{9}$ 11- $x<-21$

12- $x>-12\frac{5}{7}$ 13- $x\geq 6$ 14- $x\leq 1\frac{7}{18}$ 15- $x\geq 1\frac{1}{2}$ 16- $x\geq 0$

جائزہ مشق 4

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگایئے۔

1- a 2- c 3- c 4- c 5- c 6- a 7- c 8- a

II- خالی جگہ پر کریں۔

1- $>$ 2- $>$ 3- $<$ 4- $<$ 5- $>$ 6- $>$ 7- $>$ 8- $<$

9- $<$ 10- $<$ 11- $<$ 12- $>$

مشق 5.1

1- $-2,6$ 2- $1,5$ 3- $-8,1$ 4- $2,3$ 5- $2,\frac{4}{3}$ 6- $-8,\frac{1}{2}$ 7- $3,-4$

8- $3,-\frac{1}{3}$ 9- $2,-\frac{1}{2}$ 10- $2,\frac{-4}{5}$ 11- $2,\frac{-3}{2}$ 12- $\frac{-1}{2},\frac{4}{5}$ 13- $1,\frac{-1}{2}$

14- $5\pm 2\sqrt{7}$ 15- $3\pm 2\sqrt{3}$ 16- $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ 17- $-3\pm 2\sqrt{3}$ 18- $\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

19- $\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$ 20- $\frac{-5\pm\sqrt{73}}{6}$ 21- $\frac{-m\pm\sqrt{m^2-4n}}{2}$ 22- $\frac{3\pm 4\sqrt{15}}{11}$ 23- $-2\pm\sqrt{17}$

24- $\frac{10\pm 4\sqrt{15}}{5}$ 25- $\{13,-2\}$

مشق 5.2

1- $2,3$ 2- $\frac{3}{4},\frac{1}{2}$ 3- $-1,\frac{2}{3}$ 4- $-1,\frac{3}{2}$ 5- $-5,3$ 6- $3,\frac{-7}{2}$ 7- $\pm\sqrt{10}$

8- $\pm 2\sqrt{6}$ 9- ± 8 10- $\frac{5}{3}$ 11- $0,-5$ 12- $5,\frac{1}{3}$

مشق 5.3

1- 5,7 2- 8,10 3- 9,18 4- 5 5- 5,6 6- 12,13 7- 7,9

8- 4,8 یا 8,4

جائزہ مشق 5

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

1- *a* 2- *b* 3- *b* 4- *a* 5- *c* 6- *c* 7- *c* 8- *c* 9- *b* 10- *b*

II- خالی جگہ پر کریں۔

1- دودرجی 2- کواڈریٹک فارمولا 3- $x(2x-3)$ 4- $\{-1, 3\}$ 5- تین

6- کواڈریٹک فارمولا 7- $\{2, 3\}$ 8- $\{\pm 3\}$ 9- $(x-2)(x+2)(x^2+4)$ 10- $\{\pm 1\}$

مشق 6.1

1- $2-by-2, 3-by-1, 3-by-2$ 2- $2-by-2, 3-by-3, 1-by-3$

3- 5 4- $B=F$, $G=J$, $H=K$, $C=E$, $A=D$

مشق 6.2

1- قطاری قالب $= A, H$ کالمی قالب $= C, H$ مربعی قالب $=$ B.D.E.F.H مستطیلی قالب $= A, C, G$

2- وتری قالب $= A, C, F.$ سکیلر قالب $= B, E, G.$ ضربی ذاتی قالب $= D$

3- $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & c \\ -b & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} l & p & a \\ m & q & b \\ n & r & c \end{bmatrix}$ 4- A, C 5- A, C, E 6- C 7- A

مشق 6.3

1- (i) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 3 & 8 & 11 \\ 5 & 13 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -3 & -5 & -5 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 4 & 9 & 23 \\ 8 & 19 & 28 \\ 11 & 30 & 0 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 6 & 5 & -8 \\ -5 & 3 & -9 \\ 8 & 11 & 17 \end{bmatrix}$ (vi) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -6 \\ -3 & -1 & -7 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ 2- $-A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}, -B = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -3 \\ -4 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$,

$-C=\begin{bmatrix}-1\\7\\-4\end{bmatrix}, -D=\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&-3&-4\\-2&1&3\end{bmatrix}, -E=[-2\ -5\ 3]$ **4-** $-1,2$ **6-** $X=\begin{bmatrix}2&1\\-\frac{4}{3}&2\end{bmatrix}$

7- $a=2, b=-4, c=4, d=3, e=4, f=2$ **8-** $w=-1, x=1, y=7, z=-8$

9- $\begin{bmatrix}-a&-b\\-c&-d\end{bmatrix}$

مشق 6.4

9- $[12\ 13]$ **10-** $\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$ **11-** $\begin{bmatrix}2&4\\1&-5\end{bmatrix}$ **12-** $\begin{bmatrix}1&-9\\-3&17\end{bmatrix}$

13- $\begin{bmatrix}10&1\\-2&10\end{bmatrix}$ **14-** $\begin{bmatrix}10&-14\\15&3\end{bmatrix}$ **15-** $a=\frac{10}{7}, b=0$

مشق 6.5

1- *(i)* $uy-vx$ *(ii)* -13 *(iii)* 0 *(iv)* $\frac{13}{64}$

2- *(i)* نادر *(ii)* غیر نادر *(iii)* غیر نادر

3- *(i)* $\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}$ *(ii)* $\begin{bmatrix}3&-1\\-5&2\end{bmatrix}$ *(iii)* $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ *(iv)* معکوس ناقابل حل ہے

(v) $\begin{bmatrix}4&-\frac{3}{2}\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ *(vi)* $\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$ *(vii)* $\begin{bmatrix}\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{-4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$ **4-** $M^{-1}=\begin{bmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&\frac{-1}{2}\end{bmatrix}$

مشق 6.6

1- $\frac{-9}{2}$ **2-** *(i)* $(3,1)$ *(ii)* $\left(\frac{7}{3},\frac{3}{2}\right)$ *(iii)* $\left(\frac{-1}{2},\frac{2}{5}\right)$ *(iv)* $(-1,5)$ *(v)* $(0,2)$ *(vi)* $(-2,6)$

3- $(3,-1)$ **4-** *(i)* $(-1,2)$ *(ii)* $(1,-1)$ *(iii)* $(4,-1)$ *(iv)* ناقابل حل *(v)* $(2,-1)$ *(vi)* $\left(\frac{31}{21},\frac{59}{21}\right)$

5- *(i)* $2x-y=2, 5x+2y=4$ *(ii)* $-5x+2y=2, 2x-3y=-1$

(iii) $-4x+y=1, 5x+4y=-1$ *(iv)* $0.8x-0.6y=1,\ 0.6x+0.8y=2$

جائزہ مشق 6

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

1- a 2- a 3- a 4- c 5- a 6- c 7- b 8- c 9- c 10- c

II- خالی جگہ پر کریں۔

1- مرتبہ 2- قطاری قالب 3- ہم مرتبہ 4- برابر 5- مساوی
6- 1 7- خاصیت تلازم 8- غیر تشاکل 9- $B^t A^t$ 10- $B^{-1}A^{-1}$

مشق 7.1

1- (i) 130° (ii) 115° (iii) 42° (iv) 30° (v) 108° (vi) 20° 2- $105^\circ, 75^\circ$ 3- 70°

4- $0^\circ, 100^\circ$ 5- $70^\circ, 30^\circ$ 6- $x = 60^\circ$ 7- (i) $a = 40^\circ$

(ii) $c = 35^\circ, d = 145^\circ$ (iii) $e = 29^\circ, f = 151^\circ$ (iv) $b = 135^\circ$

(v) $q = 77^\circ, P = 103^\circ, r = 103^\circ$ (vi) $j = 30^\circ, k = 150^\circ, l = 30^\circ$

(vii) $g = 140^\circ, h = 40^\circ, i = 140^\circ$ (viii) $k = 138^\circ$ (ix) $P = 58^\circ, M = 122^\circ, N = 122^\circ$

(x) $a = 158^\circ, b = 112^\circ$

مشق 7.2

1- (a) $(\angle 1, \angle 2), (\angle 3, \angle 4)$ (b) $(\angle 1, \angle 6), (\angle 3, \angle 8), (\angle 2, \angle 7), (\angle 5, \angle 4)$ (c) کوئی نہیں

(d) $(\angle 1, \angle 8), (\angle 1, \angle 4), (\angle 4, \angle 7), (\angle 7, \angle 8), (\angle 5, \angle 6), (\angle 5, \angle 2), (\angle 2, \angle 3), (\angle 3, \angle 6),$

(e) $(\angle 1, \angle 7), (\angle 4, \angle 8), (\angle 5, \angle 3), (\angle 2, \angle 6)$

2- (a) $(\angle l, \angle n), (\angle m, \angle r)$ (b) $(\angle p, \angle n), (\angle m, \angle s), (\angle q, \angle r), (\angle l, \angle t)$ (c) کوئی نہیں

(d) $(\angle p, \angle m), (\angle p, \angle v), (\angle v, \angle \ell), (\angle \ell, \angle m), (\angle n, \angle r), (\angle r, \angle t), (\angle t, \angle s)$

(e) $(\angle p, \angle \ell), (\angle m, \angle q), (\angle n, \angle t), (\angle s, \angle r)$

مشق 7.3

1- جی ہاں ، نہیں ، جی ہاں 2- جی ہاں 3- جی ہاں 4- 10cm, 12cm, 14cm, 16cm, 18cm

5- 6cm, 12cm, 18cm, 6- 15cm, 21cm, 9cm, 12cm, 1:3

7- $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{AC} \cong \overline{DF}, \overline{BC} \cong \overline{EF}$ $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$ 8- جی نہیں 9- جی ہاں

مشق 7.4

1- (a) (i) $\overline{AB} \cong \overline{FD}$ (ii) $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ (iii) $\overline{AC} \cong \overline{FE}$ (iv) $\angle A \cong \angle F$ (v) $\angle B \cong \angle D$ (vi) $\angle C \cong \angle E$

(b) $\angle R$ (c) $\overline{EF}$ (d) ض زض ≅ ض زض (e) زض ز ≅ زض ز

2- (i) $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ by ض ض ض ≅ ض ض ض (ii) $\Delta XYZ \cong \Delta DFE$ by ض ض ز ≅ ض ض ز

(iii) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$, by زض ز ≅ زض ز (iv) $\Delta PQT \cong \Delta SRT$ by ض زض ≅ ض زض

3- $\overline{AD}\cong\overline{DA}, \overline{DB}\cong\overline{AC}, \overline{AB}\cong\overline{DC}, \angle BAD \cong \angle CDA, \angle ADB \cong \angle DAC, \angle ABD\cong\angle DCA,$
ض ض ض ≅ ض ض ض ، $m\angle ADB = 40^{\circ}$

4- (i) متشاکل مثلثیں (ii) متماثل متوازی الاضلاع (iii) متشاکل مثلثیں

5- $\overline{MN} \Leftrightarrow \overline{PQ}, \overline{NO} \Leftrightarrow \overline{QR}, \overline{PR} \Leftrightarrow \overline{MO}, \angle 1 \Leftrightarrow \angle 4$

مشق 7.5

(i) مستطیل (ii) مربع (iii) چوکور (iv) تنصیف (v) متماثل

مشق 7.6

(i) دائرہ (ii) رداس (iii) وتر (iv) قطر (v) نصف دائرہ

(vi) قوس کبیرہ (vii) رداس (viii) دائروی قطعہ (ix) خط قاطع (x) قائمہ زاویہ

جائزہ مشق 7

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

1- a 2- c 3- b 4- b 5- a 6- c 7- a 8- c 9- c 10- c

II- خالی جگہ پر کریں۔

1- متصل 2- سپلیمنٹری 3- منفرجہ 4- راس 5- 180° 6- آپس میں

7- متماثل 8- مختلف الاضلاع مثلث 9- قطر 10- قائمہ

جائزہ مشق 8

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

1- c 2- c 3- c 4- c 5- a 6- a 7- a 8- c 9- c 10- a

II- خالی جگہ پر کریں۔

1- ہم نقطہ 2- ہم نقطہ 3- ہم نقطہ 4- ہم نقطہ 5- ارتفاع

6- وسطانیہ 7- زاویہ کا ناصف 8- تین 9- تین 10- تین

مشق 9.1

1- (i) 5 (ii) 12 (iii) $4\sqrt{231}$ 3- $\sqrt{2}\ell$ 4- $8\sqrt{2}$

5- (i) قائمۃ الزاویہ مثلث (ii) Δ غیر قائمۃ الزاویہ (iii) Δ قائمۃ الزاویہ 6- 15 سینٹی میٹر 7- 7 سینٹی میٹر 8- 8 میٹر 9- $25\sqrt{2}$

جوابات

مشق 9.2

1- 20 پتھر 2- 24000 پتھر 3- 223 روپے 4- 645.50 میٹر 5- 1 منٹ 54 سیکنڈ

6- $98\ cm^2$ 7- (i) $8967cm^2$ (ii) $16.8m^2$ 8- $9000m^2$ 9- $16\sqrt{100}\ cm^2$

10- (i) $44cm^2$ (ii) $0.5m^2$ (iii) $401.14\ mm^2$ 11- $154m^2$ 12- $16\sqrt{3}m^2$ 13- $9\sqrt{3}cm^2$

14- $210cm^2$ 15- 7cm , 21cm 16- 1666.67cm 17- 72cm 18- $3600cm^2$ 19- 4cm

مشق 9.3

1- $64cm^3$ 2- $64cm^3$ 3- $24m^3$ 4- $502.86cm^3$ 5- $94.3cm^3$ 6- $113.1cm^3$

7- $127.3cm^3$ 8- $339.4cm^3$

جائزہ مشق 9

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

1- a 2- c 3- c 4- a 5- d 6- c 7- a 8- c 9- c

II- خالی جگہ پر کریں۔

1- مسئلہ فیثاغورث 2- رقبہ 3- $\frac{1}{2}\times$ قاعدہ $\times$ ارتفاع 4- $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

5- $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ 6- $l\times b$ 7- πr^2 8- l^3 9- $l\times b\times h$ 10- $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

مشق 10.1

1- (i) $\overrightarrow{OX}$ پر (ii) $\overrightarrow{OY}$ پر (iii) ربع II میں (iv) ربع I میں (v) $\overrightarrow{OX}$ پر

(vi) ربع III میں (vii) ربع IV میں (viii) ربع II میں (ix) $\overrightarrow{OY}$ پر (x) ربع IV میں

2- (i) $2\sqrt{10}$ (ii) $\sqrt{17}$ (iii) $\sqrt{106}$ (iv) $(a-b)\sqrt{2}$ 3- $x+y-10=0$

5- (10,0)

جائزہ مشق 10

I- درست جواب کے گرد دائرہ لگائیے۔

1- a 2- c 3- a 4- b 5- a 6- c 7- c 8- a 9- b 10- b

II- خالی جگہ پر کریں۔

1- فاصلے کا کلیہ 2- منفرد 3- منفرد 4- ہم خط 5- غیر ہم خط

6- ربع 7- (0,0) 8- صفر 9- حقیقی 10- مثبت

یونٹ 1: الجبری کلیے اور استعمالات:

کلیہ: جہاں کہیں ہمیں کوئی قیمت نکالنا مقصود ہوتی ہے ہم اس کے لیے قاعدہ کو کلیہ کی شکل میں لکھتے ہیں۔

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(a+b+c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab(a \pm b) \pm b^3$$

$$(x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2) = (x^3 \pm y^3)$$

مقادیر اصم: مقادیر اصم ایک غیر ناطق عدد ہوتا ہے۔

مقادیر اصم اصل: ایسی مقادیر اصم جس میں جذری رقم کا عددی سر '1' ہو، اصل مقادیر اصم کہلاتا ہے۔

مخلوط مقادیر اصم: ایسی مقادیر اصم جس میں '1' کے علاوہ کوئی ناطق جز وضربی ہو اور دوسرا جز وضربی غیر ناطق عدد ہو۔

مماثل مقادیر اصم: ایسی مقادیر اصم جن میں یکساں غیر ناطق عدد جز وضربی ہوں، مماثل یا یکساں مقادیر اصم کہلاتی ہیں۔

غیر مماثل مقادیر اصم: ایسی مقادیر اصم جن میں غیر ناطق عدد مشترک جز وضربی نہ ہو۔

جزو ناطق ساز: جب دو مقادیر اصم کا حاصل ضرب ایک ناطق عدد ہو تو ان میں سے ہر ایک دوسرے کا جزو ناطق ساز کہلاتا ہے۔

یونٹ 2: اجزائے ضربی:

یک درجی کثیر رقمی: ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ '1' ہوتا ہے یک درجی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔

دو درجی کثیر رقمی: ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ '2' ہوتا ہے، دو درجی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔

سہ درجی کثیر رقمی: ایسی کثیر رقمی جس کا درجہ '3' ہو، سہ درجی کثیر رقمی کہلاتی ہے۔

اجزائے ضربی کی اقسام: $kx + ky + kz,\ ax + ay + bx + by,\ a^2 \pm 2ab + b^2$

$a^2 - b^2,\ (a^2 \pm 2ab + b^2) - c^2,\ a^4 + a^2b^2 + b^4$ or $a^4 + b^4$,

$x^2 + px + q,\ ax^2 + bx + c,$

$a^3 + 3a^2bx + 3ab^2 + b^3,\ a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3,$

$a^3 \pm b^3.$

مسئلہ باقی: اگر کسی کثیر رقمی $P(x)$ جس کا درجہ '1' یا 1 سے بڑا ہو، کو کثیر رقمی $x-a$ سے تقسیم کیا جائے جبکہ 'a' کوئی مستقل ہو تو باقی جو بچتا ہے $P(a)$ کے برابر ہوتا ہے۔

مسئلہ جز وضربی: ایک کثیر رقمی $P(x)$ کو $x-a$ پر تقسیم کیا جائے اور $P(a) = 0$ تو $x-a$ ، $P(x)$ کا جز وضربی ہوگا۔

یونٹ 3: الجبرا کا استعمال:

H.C.F: دو الجبری جملوں کا عاد اعظم H.C.F ایک ایسا جملہ ہوتا ہے۔ جو ان جملوں کو بغیر باقی کے پورا پورا تقسیم کرتا ہے۔

L.C.M: دو یا دو سے زیادہ الجبری جملوں کا مشترک ذو اضعاف اقل ایک چھوٹے سے چھوٹا ایسا جملہ ہوتا ہے جو ان تمام جملوں سے بغیر باقی کے پورا پورا تقسیم ہو جاتا ہے۔

یونٹ4: یک درجی مساوات اور غیر مساوات:

یک درجی مساوات: $ax + b = 0, a \neq 0$ کی شکل کی مساوات جس میں a اور b کوئی مستقلات ہیں اور 'x' ایک متغیر ہے۔ ایک متغیر میں یک درجی مساوات کہلاتی ہے۔

یک درجی مساوات کا حل: متغیر کی ایسی قیمت جو مساوات پر پورا اترتی ہے یک درجی مساوات کا حل کہلاتی ہے۔

مطلق قیمت: کسی حقیقی عدد 'x' کی مطلق قیمت کو $|x|$ لکھا جاتا ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x, & if \quad x>0 \\ 0, & if \quad x=0 \\ -x, & if \quad x<0 \end{cases}$$

یک درجی غیر مساوات: دو یک درجی الجبری جملوں کو علامات $\geq, \leq, >, <$ سے ملانے سے حاصل شدہ تعلق یک درجی غیر مساوات کہلاتا ہے۔

خاصیت ثلاثی: اگر $x, y \in R$ ہو تو $x > y$ یا $x = y$ یا $x < y$

خاصیت متعدیت: اگر $x, y, z \in R$ ہوں تو $x > y$ اور $y > z$ تو $x > z$

جمعی خاصیت: اگر $\forall a, b, c, d \in R$ ہو اور $a > b$ تو $\Leftarrow \; a + b > b + c$

اور $c < d$ تو $\Leftarrow \; a + c < a + d$

ضربی خاصیت: $\forall a, b, c, d \in R$ اور $a > b$ اور $c > d \Leftarrow ac > bd$ اور $a < d$ اور $c < d \Leftarrow ac < bd$

یونٹ5: دو درجی مساوات:

دو درجی مساوات: ایک متغیر میں دو درجی مساوات کو $ax^2 + bx + c = 0$ کی شکل میں لکھا جاتا ہے جبکہ $a \neq 0$ یہاں 'x' ایک متغیر ہے اور a, b, c حقیقی اعداد ہیں۔

دو درجی مساوات کا حل: ہم دو درجی مساوات کو (i) تجزی سے (ii) تکمیل مربع سے حل کر سکتے ہیں۔

دودوجی مساوات کا کلیہ: $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

یونٹ6: قالب اور مقطع:

قالب: کسی قاعدہ اور قانون کے تحت اعداد کی مستطیل شکل میں دی گئی دو بریکٹوں میں ترتیب قالب کہلاتی ہے۔

قالب کا درجہ: قطاروں اور کالموں کی تعداد کسی قالب کے درجہ کا تعین کرتی ہے۔

کالمی قالب: ایسا قالب جس میں صرف ایک کالم ہو کالمی قالب کہلاتا ہے۔

مربعی قالب: مربعی قالب میں قطاروں کی تعداد کالموں کی تعداد کے برابر ہوتی ہے۔

مستطیلی قالب: ایسا قالب جس میں کالموں کی تعداد قطاروں کے برابر نہ ہو۔

صفری قالب: اگر کسی قالب میں تمام ارکان صفر ہوں تو وہ صفری قالب کہلاتا ہے۔

اکائی یا وحدانی قالب: وحدانی قالب میں وتر کے تمام ارکان '1' اور وتر کے علاوہ باقی تمام ارکان صفر ہوتے ہیں۔

قالب کا ٹرانسپوز: قالب کی قطاروں کو کالموں کی شکل میں تبدیل کرنے سے جو قالب حاصل ہوتا ہے اصل قالب کا ٹرانسپوز کہلاتا ہے۔

متشاکل قالب: اگر کسی قالب A کا ٹرانسپوز A'، قالب A کے برابر ہو تو قالب A متشاکل قالب کہلاتا ہے یعنی $A' = A$

عکسی متشاکل قالب: اگر کسی قالب A کے لیے $A' = -A$ ہو تو قالب A عکسی متشاکل قالب کہلاتا ہے۔

قالب کا مقطع: کسی مربعی قالب کی عددی قیمت قالب کا مقطع کہلاتی ہے۔

نادر قالب: اگر مربعی قالب کا مقطع صفر ہو تو قالب نادر قالب کہلاتا ہے۔ وگرنہ غیر نادر قالب۔

2 بائی 2 مربعی قالب کا ایڈ جائنٹ: 2 بائی 2 مربعی قالب کا ایڈ جائنٹ قالب کے وتری ارکان کو آپس میں بدل کر اور غیر وتری ارکان کی علامت تبدیل کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔

2 بائی 2 مربعی قالب کا ضربی معکوس: کسی 2 بائی 2 مربعی قالب کا ضربی معکوس قالب B ہوگا اگر $AB = BA = I$ جبکہ I ضربی ذاتی قالب ہے۔

یونٹ 7: جیومیٹری کے بنیادی تصورات:

زاویہ: زاویہ دو ایسی شعاعوں کا یونین ہوتا ہے جن کا نقطہ آغاز مشترک ہو۔

زاویہ قائمہ: زاویہ قائمہ کا درجہ 90^o ہوتا ہے۔

زاویہ مستقیم: زاویہ مستقیم میں 180^o ہوتے ہیں۔

حادہ زاویہ: حادہ زاویہ صفر درجہ سے زیادہ اور 90^o سے کم ہوتا ہے۔

منفرجہ زاویہ: منفرجہ زاویہ 90^o سے زیادہ اور 180^o سے کم ہوتا ہے۔

زاویہ عکس: زاویہ عکس میں 180^o سے زیادہ اور 360^o سے کم ہوتا ہے۔

مساوی زاویے: ایسے زاویے جن کی مقدار یکساں ہو۔

متصل زاویے: ایسے دو زاویے جن کا مشترک راس اور ایک بازو مشترک ہو۔

کمپلیمنٹری زاویے: ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ 90^o ہو۔

سپلیمنٹری زاویے: ایسے دو زاویے جن کا مجموعہ 180^o کے برابر ہو۔

راسی زاویے: دو متقاطع خطوط سے بننے والے ایسے زاویوں کے جوڑے جو غیر متصل ہوں اور ہر ایک کی مقدار زاویہ مستقیم سے کم ہو۔

نتائج:

1۔ مثلث کے زاویوں کا مجموعہ زاویہ 180^o ہوتا ہے۔

2۔ اگر دو زاویے مساوی زاویوں کے کمپلیمنٹ کے برابر ہوں تو وہ آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

3۔ اگر دو زاویے مساوی زاویوں کے سپلیمنٹ کے برابر ہوں تو وہ آپس میں بھی برابر ہوتے ہیں۔

4۔ اگر دو خطوط کسی تیسرے خط کے متوازی ہوں تو وہ آپس میں بھی متوازی ہوتے ہیں۔

5۔ اگر تین متوازی خطوط کسی خط پر مساوی قطعات قطع کریں تو وہ ہر دوسرے خط پر مساوی قطعات قطع کریں گے۔

6۔ اگر کوئی خط کسی مثلث کے ضلع کی تنصیف کرے اور دوسرے ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی بھی تنصیف کرے گا۔

قاطع خط: ایک ایسا خط جو دو خطوط کو مختلف نقاط پر قطع کرے۔

متماثل اشکال: دو ہندسی اشکال جو شکل اور جسامت میں یکساں ہوں متماثل اشکال کہلاتی ہیں۔

کثیر الاضلاع: تین یا تین سے زیادہ مختلف قطعات کی بند شکل کثیر الاضلاع کہلاتی ہے۔

مساوی الاضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع مساوی ہوں۔

مساوی الساقین مثلث: ایسی مثلث جس کے دو اضلاع مساوی ہوں۔

مختلف اضلاع مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں مختلف ہوں۔

قائمۃ الزاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کا ایک زاویہ قائمہ ہو۔

منفرجہ الزاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کا ایک زاویہ منفرجہ ہو۔

حادۃ الزاویہ مثلث: ایسی مثلث جس کے تینوں زاوے حادہ ہوں۔

دو مثلثان کے تماثل کی خصوصیات: (i) ض ض ض ≅ ض ض ض (ii) ض زض ≅ ض زض (iii) زض ز ≅ زض ز (iv) ززض ≅ ززض (v) وض ≅ وض

چوکور: ایسی کثیر الاضلاع جس کے چار اضلاع ہوں۔

متوازی الاضلاع: ایسی چوکور جس کے دو مخالف اضلاع کے جوڑے متوازی ہوں۔

مستطیل: ایسی متوازی الاضلاع جس میں ہر ایک زاویہ قائمہ ہو۔

مربع: ایسی مستطیل جس کے چاروں اضلاع مساوی ہوں۔

دائرہ: مستوی کے ایسے نقاط کا سیٹ جن کا ایک معین نقطہ سے فاصلہ برابر ہو، معین نقطہ دائرہ کا مرکز کہلاتا ہے۔

رداس: دائرہ کے مرکز سے دائرہ کے کسی نقطہ تک کا فاصلہ رداس کہلاتا ہے۔

قطر: دائرہ کا ایسا وتر جو مرکز میں سے گزرتا ہو قطر کہلاتا ہے۔

قوس: دائرہ کا کچھ حصہ جس کے سرے کے نقاط اور ان کے درمیانی نقاط پر مشتمل ہو۔

نصف دائرہ: قوس جو دائرہ کے نصف کے برابر ہو نصف دائرہ کہلاتا ہے۔

قوس صغیرہ: قوس جو نصف دائرہ سے چھوٹی ہو قوس صغیرہ کہلاتی ہے۔

قوس کبیرہ: قوس جو نصف دائرہ سے بڑی ہو قوس کبیرہ کہلاتی ہے۔

متماثل دائرے: ایسے دائرے جن کے رداس یا قطر برابر ہوں متماثل دائرے کہلاتے ہیں۔

خط قاطع: ایسا خط جو دائرے کو دو نقاط پر کاٹے خط قاطع کہلاتا ہے۔

مماس: ایسا خط جو دائرے کے رداسی قطعہ کے بیرونی نقطہ پر عمود ہو۔

سیکٹر: دائرے کا کچھ حصہ اور اس کے سروں کو مرکز سے ملانے والے رداسی قطعات کا درمیانی حصہ سیکٹر کہلاتا ہے۔

ہم دائرہ نقاط: ایک ہی دائرہ کے محیط پر واقع نقاط۔

ہم مرکز دائرے: ایسے تمام دائرے جن کا مرکز مشترک نقطہ ہو اور ان کے رداس مختلف ہوں۔

مرکزی زاویہ: دو رداسی قطعات کے درمیان مرکز پر بننے والا زاویہ

نتیجہ: (1) نصف دائرہ کا محصور زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

(2) ایک ہی قطعہ میں بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

(3) ایک ہی قوس میں بننے والے زاویے مساوی ہوتے ہیں۔

یونٹ 8: عملی جیومیٹری:

1۔ کسی مثلث کے زاویہ کا ناصف کسی زاویے کی تنصیف کرنے والا خط ہوتا ہے

2۔ ہر مثلث کے تین زاویوں کے ناصف ہوتے ہیں

3۔ مثلث کا ارتفاع کسی راس سے مخالف ضلع پر عمود ہوتا ہے۔

4۔ ہر مثلث کے تین ارتفاع ہوتے ہیں، ہر راس سے ایک۔

5۔ ایک قطعہ خط جو مثلث کے کسی ضلع کی تنصیف کرے اور اس پر عمود بھی ہو تو وہ اس کا عمودی ناصف کہلاتا ہے۔

6۔ مثلث کے ہر ضلع کا ایک عمودی ناصف کے حساب سے تین عمودی ناصف ہوتے ہیں۔

7۔ وہ نقطہ جہاں پر مثلث کے تینوں زاویوں کے ناصف ملتے ہیں، مثلث کا مرکز محصور کہلاتا ہے۔

8۔ وہ نقطہ جہاں مثلث کے تینوں ارتفاع ملتے ہیں، مثلث کا مرکز عمود کہلاتا ہے۔

9۔ وہ نقطہ جہاں مثلث کے تینوں اضلاع کے عمودی ناصف ملتے ہیں مثلث کا مرکز محاصرہ کہلاتا ہے۔

10۔ دائرے کے ساتھ ہم مستوی خط جو دائرہ کو صرف ایک نقطہ پر قطع کرے دائرہ کا مماس کہلاتا ہے۔

یونٹ 9: رقبہ اور حجم:

مسئلہ فیثاغورث: قائمۃ الزاویہ مثلث کے وتر کا مربع باقی دونوں بازوؤں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

رقبہ: کسی بھی بند شکل کے درمیان گھری ہوئی سطح اُس کا رقبہ کہلاتی ہے۔

مثلث کا رقبہ: $A = \frac{1}{2} \times$ (ارتفاع) $\times$ (قاعدہ)

مثلث کا رقبہ: $A = \sqrt{S(s-a)(s-b)(s-c)}$ $S = \frac{a+b+c}{2}$ ، a, b, c مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہیں۔

مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ: $A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ جبکہ 'a' مثلث کے ہر ضلع کی لمبائی ہے۔

مستطیل کا رقبہ: چوڑائی × لمبائی

مربع کا رقبہ: ضلع × ضلع

متوازی الاضلاع کا رقبہ: ارتفاع × قاعدہ

دائرے کا رقبہ: $A = \pi \times$ (رداس)^2

دائرہ کا محیط: $A = 2 \times \pi \times$ (رداس)

نصف دائرہ کا رقبہ: $A = \frac{1}{2}(\pi r^2)$

دو ہم مرکز دائروں کے درمیان رقبہ: $A = \pi\left[r_1^2 - r_2^2\right]$

بیرونی دائرہ کا رداس r_1 اندرونی دائرہ کا رداس r_2

حجم: تین پہلو والی شکل کی چار دیواروں میں گھری ہوئی خلا اس شکل کا حجم کہلاتی ہے۔

مکعب کا حجم: $V = l^3$ جبکہ l مکعب کے ہر ایک کنارا کی لمبائی ہے۔

مکعب نما کا حجم: $V = l \times b \times h$ جبکہ b = چوڑائی l = لمبائی اور h = اونچائی

عمودی دائروی سلنڈر کا حجم: $V = \pi r^2 h$ جبکہ h = سلنڈر کی اونچائی اور r = قاعدہ کا رداس

عمودی دائروی مخروط کا حجم: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ جبکہ h = مخروط کی اونچائی اور r = قاعدہ کا رداس

کرے کا حجم: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ جبکہ r = کرے کا رداس

نصف کرے کا حجم: $V = \frac{2}{3}\pi r^3$ جبکہ r = کرے کا رداس

یونٹ 10: محددی جیومیٹری کا تعارف:

دو نقاط کے درمیان فاصلہ کا کلیہ: $d = |\overline{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

1۔ عددی مستوی میں ایک نقطہ کو ایک اور صرف ایک عددی جوڑا سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

2۔ اعداد کا ہر جوڑا عددی مستوی کے ایک اور صرف ایک نقطہ سے جوڑا جا سکتا ہے۔

ہم خط نقاط: ایک ہی خط پر واقع نقاط ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔

غیر ہم خط نقاط: ایسے نقاط جو ایک ہی خط پر نہ واقع ہوں، غیر ہم خط نقاط کہلاتے ہیں۔

علامات

جس کے لیے ہے	علامت	جس کے لیے ہے	علامت
چونکہ اسی طرح	$\because$	سے چھوٹا ہے	$<$
لہٰذا/ پس	$\therefore$	سے بڑا ہے	$>$
نسبت	$:$	سے چھوٹا ہے یا برابر ہے	$\leq$
کے متناسب ہے	$::$	سے بڑا ہے یا برابر ہے	$\geq$
لامحدود/ بے شمار	∞	برابر ہے	$=$
ٹیلی کا نشان	$\vert$	برابر نہیں ہے	$\neq$
مجموعہ	Σ	سے چھوٹا نہیں ہے	$\nless$
قطعہ خط AB	$\overline{AB}$	سے بڑا نہیں ہے	$\ngtr$
شعاع AB	$\overrightarrow{AB}$	کا رکن ہے	$\in$
خط AB	$\overleftrightarrow{AB}$	تمام قیمتوں کے لیے	$\forall$
زاویہ	$\angle$	جذر	$\sqrt{\ }$
مثلث	$\triangle$	x کی مطلق قیمت	$\vert x\vert$
کے مشابہ	$\sim$	اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ	$\Rightarrow$
متماثل	$\cong$	صرف اور صرف	$\Leftrightarrow$
کے تقریباً برابر ہے	$\approx$	اور	$\wedge$
کے متوازی ہے	$\parallel$	یونین یا اتصال	$\cup$
قوس AB	$\widehat{AB}$	یا	$\vee$
مطابقت میں	$\leftrightarrow$	انٹرسیکشن/ تقاطع	$\cap$

A

Area Of Concentric Circles	ہم مرکز دائروں کے درمیان کا رقبہ	261
Absolute Value	مطلق قیمت	97
Acute Angle	حادہ زاویہ	177
Add And Subtract Matrices	قالبوں کو جمع اور تفریق کرنا	138
Addition And Subtraction Of Matrices	قالبوں کی جمع اور تفریق	138
Addition And Subtraction Of Surds	مقادیر اصم کی جمع اور تفریق	23
Addition Of Matrices	قالبوں کی جمع	138
Additive Identity Of Matrices	قالبوں کا جمعی ذاتی عنصر	142
Additive Inverse Of A Matrix	قالب کا جمعی معکوس	143
Adjacent Angles	متصلہ زاویے	178
Adjacent, complementary and supplementary angles	متصلہ کمپلیمنٹری اور سپلیمنٹری زاویے	178
Adjoint Of A Matrix	قالب کا ایڈ جائنٹ	157
Algebraic Expressions	الجبری جملے	2
Algebraic Manipulation	الجبری حسابات	57
Altitudes Of A Triangle	مثلث کے ارتفاع	225
Angle	زاویہ	176
Angle Bisectors Of A Triangle	مثلث کے زاویوں کے ناصف	224
Angle In A Semi-circle Is A Right Angle	نصف دائرہ کا زاویہ قائمہ ہوتا ہے	210
Angle In The Same Segment Are Equal	ایک قطعہ میں زاویے مساوی ہوتے ہیں	211
Applications	اطلاق	213
Arc	قوس	208
Area Of A Circle	دائرہ کا رقبہ	260
Area Of A Parallelogram When Base And Altitude Are Given	متوازی الاضلاع کا رقبہ جبکہ اس کا قاعدہ اور ارتفاع معلوم ہو	255
Area Of A Semicircle	نصف دائرہ کا رقبہ	260
Area Of A Triangle When All The Three Sides Are Given	مثلث کا رقبہ جبکہ اس کے تینوں اضلاع معلوم ہوں	252
Area Of An Equilateral Triangle When Its Side Is Given	مساوی الاضلاع مثلث کا رقبہ جبکہ اس کا ضلع معلوم ہو	254
Area Of Four Walls Of A Room	کمرہ کی چار دیواری کا رقبہ	256
Areas	رقبے	251
Areas And Volumes	رقبہ اور حجم	247
Areas of Rectangular And Square Fields	مستطیلی اور مربعی علاقوں کے رقبے	257
Associative Law	خاصیت تلازم	141
Associative Law Of Matrices With Respect To Multiplication	قالبوں کی ضرب کے لحاظ سے خاصیت تلازم	147

B

Basic Operations On The Algebraic Fractions	الجبری کسروں پر بنیادی عوامل	71

C

Calculate Unknown Angles	نامعلوم زاویہ معلوم کرنا	182
Calculate Unknown Angles Of A Triangle	مثلث کا نامعلوم زاویہ معلوم کرنا	184
Center	مرکز	206
Central Angle	مرکزی زاویہ	212
Chord	وتر	207
Circle	دائرہ	206
Collinear And Non-collinear Points	ہم خط اور غیر ہم خط نقاط	281
Collinear Points	ہم خط نقاط	281
Collinearity Of Three Points	تین نقاط کا ہم خط ہونا	282
Column Matrix	کالمی قالب	133
Commutative Law	خاصیت مبادلہ	141
Complementary Angles	کمپلیمنٹری زاویے	179
Concentric Circles	ہم مرکز دائرے	209
Congruent And Similar Figures	متماثل اور متشابہ اشکال	193
Congruent Figures	متماثل اشکال	193
Congruent Triangles	متماثل مثلثان	198
Conjugate Binomial Surds	دو رقمی مقادیر اصم کے زوج	27
Construction	بناوٹ	222
Construction Of Quadrilaterals	چوکور کی بناوٹ	230
Construction Of Triangle	مثلث کی بناوٹ	222
Cramer's Rule	کریمر کا قانون	167
Cube	مکعب	264
Cube And Cuboid	مکعب اور مکعب نما	264
Cubic Polynomials	تین درجی کثیر رقمیاں	36
Cuboid	مکعب نما	265

D

Derivation Of Quadratic Formula	دو درجی کلیہ اخذ کرنا	115
Determinant Function	مقطع فنکشن	156
Diagonal Matrix	وتری قالب	134
Diagonals Of A Rectangle Bisect Each Other	مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں	204
Diagonals Of A Square Bisect Each Other	مربع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں	203
Diameter	قطر	207
Direct Common Tangent Or External Tangent	راست مشترک مماس یا بیرونی مماس	235
Distance Between Two Points	دو نقاط کے درمیان فاصلہ	278
Distance Formula	فاصلہ کا کلیہ	276
Distributive Laws	کلیہ تقسیمی	149
Division Of A Rational Expression	ناطق جملوں کی تقسیم	9
Drawing Tangents	مماس کھینچنا	239
Drawing Tangents To Two Equal Circles	دو مساوی دائروں کے مماس کھینچنا	235
Drawing Tangents To Two Un-equal Circles	دو غیر مساوی دائروں کے مماس کھینچنا	237

E

Equal Angles	مساوی زاویے	178
Equal Circles	مساوی دائرے	208
Equations Involving Absolute Value	مطلق قیمت والی مساوات	97
Equations Involving Radicals	جذر والی مساوات	93
Evaluate Determinant Of A Matrix	قالب کا مقطع کی قیمت نکالنا	156
Examine A Given Algebraic Expression	الجبری جملے کا مشاہدہ کرنا	4

انڈکس

F

Factorization	تجزی	35
Factorization Of Expressions	جملے کی تجزی کرنا	36
Factorizing A Cubic Polynomial	تین درجی کثیر رقمی کی تجزی کرنا	52
Finding Remainder Without Dividing	بغیر تقسیم کے باقی معلوم کرنا	49
Formulae	کلیے	13
Four Angles Of A Rectangle Are Right Angles	مستطیل کے چاروں زاویے قائمہ ہوتے ہیں	204
Four Angles Of A Square Are Right Angles	مربع کے چاروں زاویے قائمہ ہوتے ہیں	203
Four Sides Of A Square Are Equal	مربع کے چاروں ضلع مساوی ہوتے ہیں	202
Fundamentals Of Geometry	جیومیٹری کے بنیادی تصورات	175

H

H.C.F By Division	تقسیم کے قاعدہ سے عاداعظم HCF معلوم کرنا	61
H.C.F. By Factorization Method	بذریعہ تجزی HCF عاداعظم معلوم کرنا	58
Hemispheres	نصف کرہ	268
Highest Common Factor (HCF) And Least Common Multiple (LCM)	عاداعظم HCF اور ذواضعاف اقل LCM	58

I

Improper Rational Expression	غیر واجب ناطق جملے	3
Inequalities (> , <) And (> , <)	غیر مساواتیں	98
Introduction To Coordinate Geometry	محددی جیومیٹری کا تعارف	275
Inverse Of A Non-singular Matrix	غیر نادر قالب کا معکوس	160
Irrational Numbers	غیر ناطق اعداد	21

L

L.C.M. By Factorization	بذریعہ تجزی ذواضعاف اقل LCM	64
Laws Of Addition Of Matrices	قالبوں کی جمع کا قانون	141
Laws Of Radicals	ریڈیکل کا قانون	22
Least Common Multiple (L.C.M)	ذواضعاف اقل LCM	64
Linear Equation In One Variable	ایک متغیر میں یک درجی مساوات	86
Linear Equations	یک درجی مساوات	86
Linear Inequalities	یک درجی غیر مساوات	98
Linear Polynomials	یک درجی کثیر رقمیاں	36

M

Major Arc	قوس کبیرہ	208
Matrices And Determinants	قالب اور مقطع	127
Matrix Equality	قالبوں کی برابری	131
Matrix Inversion Method	قالبوں کے معکوس کا طریقہ	165
Medians Of A Triangle	مثلث کے وسطانیے	228
Minor Arc	قوس صغیرہ	208
Mixed Surds	مخلوط مقادیر اصم	22
Multiplication And Division Of The Algebraic Fractions	الجبری کسور کی ضرب اور تقسیم	72
Multiplication And Division Of Two Surds	دو مقادیر اصم کی ضرب اور تقسیم	23
Multiplication Of Matrices	قالبوں کی ضرب	145
Multiplicative Inverse	ضربی معکوس	158
Multiplicative Inverse Of A Matrix	قالب کا ضربی معکوس	156

N

Non-singular Matrix	غیر نادر قالب	157

O

Obtuse Angle	منفرجہ زاویہ	177
Opposite Sides Of A Rectangle Are Equal	مستطیل کے مخالف اضلاع مساوی ہوتے ہیں	203
Order Of A Matrix	قالب کا مرتبہ	130

P

Parallel Lines	متوازی خطوط	187
Parallelogram	متوازی الاضلاع	231
Perpendicular Bisectors Of The Sides Of A Triangle	مثلث کے اضلاع کے عمودی ناصف	227
Problems Involving Quadratic Equations	دو درجی مساوات عبارتی سوالات	121
Proper Rational Expression	واجب ناطق جملہ	3
Properties Of A Parallelogram	متوازی الاضلاع کی خصوصیات	205
Properties Of Angles	زاویوں کے خواص	210
Properties Of Congruency	تماثل کے خواص	202
Properties Of Congruency Between Two Triangles	دو مثلثوں کے تماثل کی شرائط	198
Properties Of Inequalities	غیر مساواتوں کے خواص	99
Properties Of Parallel Lines	متوازی خطوط کے خواص	187
Pure Surds	اصل مقادیر اصم	22
Pythagoras Theorem	مسئلہ فیثا غورث	248

Q

Quadratic Equations	دو درجی مساوات	108
Quadratic Polynomials	دو درجی کثیر رقمیاں	36
Quadrilaterals	چوکور	202

R

Radius	رداس	206
Rational Expression	ناطق جملے	2

Rational Expression In Its Lowest Terms	مختصر ترین ناطق جملہ	4
Rational Numbers	ناطق اعداد	21
Rationalization	ناطق بنانا	27
Rationalizing Factor	ناطق بنانے والا جزو ضربی	27
Rationalizing Of Surds	مقادیر اصم کو ناطق بنانا	28
Rationalizing The Denominator	مخرج کو ناطق بنانا	24
Real Numbers	حقیقی اعداد	21
Rectangle	مستطیل	230
Rectangular Matrix	مستطیلی قالب	133
Reduce A Rational Expression To Its Lowest Terms	ناطق جملہ کو اس کی مختصر ترین حالت میں لکھنا	5
Reflex Angle	زاویہ عکس	177
Relation Between The Pairs of angles	زاویوں کے جوڑوں میں تعلق	191
Remainder Theorem And Factor Theorem	مسئلہ باقی اور مسئلہ جزو ضربی	47
Right Angle	قائمہ زاویہ	177
Right Circular Cone	عمودی دائروی مخروط	266
Row Matrix	قطاری قالب	133

S

Scalar Matrix	سکیلر قالب	134
Secant Line	دائرے کا خط قاطع	209
Sector	دائرے کا سیکٹر	209
Semi Circle	نصف دائرہ	208
Similar Figures	متشابہ اشکال	195
Similar Surds	ہم شکل مقادیر اصم	23
Singular And Non-singular Matrices	نادر اور غیر نادر قالب	157
Singular Matrix	نادر قالب	157
Skew-symmetric Matrix	عکس متشاکل قالب	136
Solution Of A Linear Equation	یک درجی مساوات کا حل	87
Solution Of A Quadratic Equation	دو درجی مساوات کا حل	108
Solution Of A Quadratic Equation By Completing The Square Method	تکمیل مربع سے دو درجی مساوات کا حل	110
Solution Of A Quadratic Equation By Factorization	دو درجی مساوات کا حل بذریعہ تجزی	108
Solution Of Simultaneous Linear Equations	یک درجی ہمزاد مساواتوں کا حل	165
Solving Linear Inequalities	یک درجی غیر مساوات حل کرنا	101
Square	مربع	231
Square Matrix	مربع قالب	133
Square Root By Division Method	جذر بذریعہ طریقہ تقسیم	79
Square Root By Factorization Method	جذر بذریعہ طریقہ تجزی	75
Square Root Of Algebraic Expression	الجبری جملوں کا جذر	75
Straight Angle	زاویہ مستقیم	176
Subtraction Of Matrices	قالبوں کی تفریق	138
Sum, Difference And Product Of Rational Expressions	ناطق جملوں کی جمع، تفریق اور ضرب	6
Supplementary Angles	سپلیمنٹری زاویے	179
Surds	مقادیر اصم	21
Surds of Radicals	جذر والے مقادیر اصم	21
Surds Of Second Order	دوسرے مرتبہ کے مقادیر اصم	23
Symbol	علامت	196
Symmetric Matrix	متشاکل قالب	135

T

Tangent	مماس	209
Tangent To A Circle	دائرے کا مماس	233
Tangent To Two Un-equal Intersecting Circles	غیر مساوی متقاطع دائروں پر مماس	240
Tangent To Two Un-equal Touching Circles	دو غیر مساوی مس کرتے ہوئے دائروں پر مماس	239
The Area Of A Rectangle When Its Two Sides Are Given	ایسی مستطیل کا رقبہ جس کے دونوں اضلاع دیے گئے ہیں	255
The Area Of A Triangle	مثلث کا رقبہ	252
The Area Of A Triangle When Base And Altitude Is Given	ایسی مثلث کا رقبہ معلوم کرنا جس کا قاعدہ اور ارتفاع معلوم ہوں	253
The Factor Theorem	مسئلہ تجزی	50
The Quadratic Formula	دو درجی کلیہ	115
The Remainder Theorem	مسئلہ باقی	48
The Sphere	کرہ	267
To Draw Angle-bisectors Of A Triangle	مثلث کے زاویوں کے ناصف کھینچنا	224
Transitive	متعدیت	100
Transpose Of A Matrix	قالب کا ٹرانسپوز	135
Transverse Common Tangent Or Internal Tangent	معکوس مشترکہ مماس یا اندرونی مماس	236
Trichotomy	ثلاثی خاصیت	99
Types Of Matrices	قالب کی اقسام	133

U

Unit Matrix Or Identity Matrix	اکائی قالب یا ضربی ذاتی قالب	134
Use Of Distance Formula	فاصلہ کے کلیہ کا استعمال	283
Transverse	قاطع خط	191

V

Value Of An Algebraic Expression	الجبری جملے کی قیمت	10
Vertical Angles	راسی زاویے	181
Volume	حجم	264
Volume Of Right Circular Cylinder	عمودی دائروی سلنڈر کا حجم	266

Z

Zero Or Null Matrix	صفری قالب	134
Zeros Of Polynomial	کثیر رقمی کے صفر	50

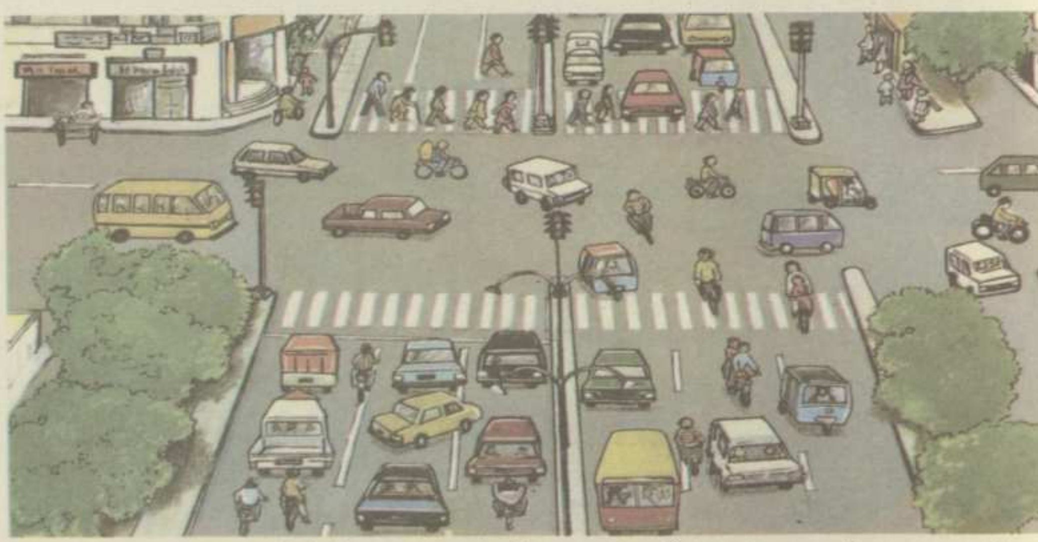
مصنفین کا تعارف

ڈاکٹر محمد عزیر احمد چیئرمین شعبہ ریاضی یونیورسٹی آف انجینئرنگ اینڈ ٹیکنالوجی (یو۔ای۔ٹی) لاہور اس کتاب کے مصنف ہیں۔آپ نے پی۔ایچ۔ڈی یونیورسٹی آف ویسٹرن آنٹوریوکینیڈا سے مکمل کی۔کالج میں 4 سالہ تدریسی تجربہ رکھنے کے علاوہ 30 سال کا یونیورسٹی میں بھی تجربہ رکھتے ہیں۔آپ نے ٹیچنگ اسسٹنٹ کے طور پر یونیورسٹی آف ویسٹرن آنسٹوریوکینیڈا میں پڑھایا۔آپ پنجاب ریاضی سوسائٹی کے صدر رہے اور ریاضی کے قومی اور بین الاقوامی سیمینارز میں شرکت کر چکے ہیں۔

آپ نے 1980 میں یو۔ای۔ٹی میں بطور لیکچرار تعینات ہونے سے پہلے گورنمنٹ کالج گڑی دوپٹہ آزاد کشمیر اور تعلیمات عالیہ گرلز کالج راولپنڈی میں پڑھایا اور آپ یو۔ای۔ٹی میں بطور اسسٹنٹ پروفیسر ریاضی خدمات سرانجام دیتے رہے۔اب آپ چیئرمین شعبہ ریاضی یو۔ای۔ٹی لاہور اپنے فرائض منصبی سرانجام دے رہے ہیں۔

محترم جناب مقصود رضا احمد جو کہ ریاضی کے ایسوسی ایٹ پروفیسر ہیں۔انہوں نے ایم ایس سی ریاضی کی ڈگری پنجاب یونیورسٹی لاہور سے حاصل کی۔آپ کو گورنمنٹ کالج لاہور میں پہلی پوزیشن حاصل کرنے پر رول آف آنرز کا ایوارڈ دیا گیا۔1979ء میں آپ نے یونیورسٹی آف بلوچستان کوئٹہ کے شعبہ ریاضی میں بحیثیت لیکچرر ملازمت اختیار کی۔آپ تقریباً ایک سال ایم ایس سی کی کلاسز کو پڑھاتے رہے۔پنجاب پبلک سروس کمیشن کی طرف سے سلیکشن ہونے پر 1980ء میں آپ کالج کیڈر میں مقرر ہوئے۔1982ء میں آپ کو بلغاریہ کے لیے پوسٹ گریجوایٹ سکالرشپ دیا گیا۔1990ء میں آپ کو "کامن ویلتھ سکالرشپ فار پوسٹ گریجوایٹ سٹڈیز" کے لیے نامزد کیا گیا۔1994ء میں آپ کو یونیورسٹی آف انجینئرنگ اینڈ ٹیکنالوجی لاہور کی طرف سے ایم فل کی ڈگری دی گئی۔تصنیف وتالیف کے شعبہ میں بھی آپ کی خدمات قابل قدر ہیں۔پرائمری، مڈل، سیکنڈری اور انٹرمیڈیٹ کے لیول کی 20 سے زیادہ کتابیں آپ لکھ چکے ہیں۔آپ اس وقت گورنمنٹ شالیمار ڈگری کالج باغبانپورہ میں تدریسی خدمات انجام دے رہے ہیں۔

بس سٹینڈ بس رُکنے پر، بس میں سوار مسافروں کو پہلے اترنے دیں۔ پھر لائن میں بس پر سوار ہوں۔



ساتھیوں اور والدین کی مدد سے اُن آٹھ جگہوں کی نشاندہی کریں جہاں ٹریفک قوانین کی خلاف ورزی ہو رہی ہے۔

عرضِ ناشر

یہ کتاب قومی نصاب ۲۰۰۶ء اور نیشنل ٹیکسٹ بک اینڈ لرننگ میٹریلز پالیسی ۲۰۰۷ء کے تحت بین الاقوامی معیار پر تیار کی گئی ہے۔ یہ کتاب حکومت پنجاب کی طرف سے تمام سرکاری سکولوں میں بطور واحد ٹیکسٹ بک مہیا کی گئی ہے۔ اگر اس کتاب میں کوئی تصور وضاحت طلب ہو یا متن اور املا وغیرہ میں کوئی غلطی ہو تو اس بارے میں ادارے کو آگاہ کریں۔ ادارہ آپ کا شکر گزار ہوگا۔

قومی ترانہ

پاک سرزمین شاد باد   کِشورِ حسین شاد باد
تُو نشانِ عزمِ عالی شان   ارضِ پاکستان
مرکزِ یقین شاد باد
پاک سرزمین کا نظام   قوّتِ اخوّتِ عوام
قوم مُلک سلطنت   پائندہ تابندہ باد
شاد باد منزلِ مُراد
پرچمِ ستارہ و ہلال   رہبرِ ترقّی و کمال
ترجمانِ ماضی شانِ حال   جانِ استقبال
سایۂ خدائے ذُوالجلال

ناشر: علی برادران
G/1-2، پنجاب پلازہ مچھلی منڈی اردو بازار لاہور
فون: 042-37242233 فیکس: 042-37361207
ویب سائٹ: www.alibrotheran.com
ای میل: info@alibrotheran.com

Item No. U-3

ISBN 978-969-9719-01-3
9 789699 719011