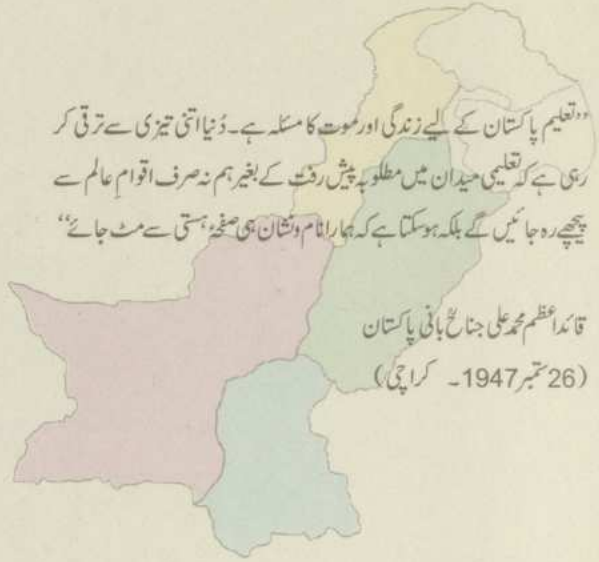




”تعلیم پاکستان کے لیے زندگی اور موت کا مسئلہ ہے۔ دنیا اتنی تیزی سے ترقی کر رہی ہے کہ تعلیمی میدان میں مطلوبہ پیش رفت کے بغیر ہم نہ صرف اقوام عالم سے پیچھے رہ جائیں گے بلکہ ہو سکتا ہے کہ ہمارا نام نشان ہی صفحہ ہستی سے مٹ جائے“

قائد اعظم محمد علی جناح بانی پاکستان
(26 ستمبر 1947ء - کراچی)



جزل ریاضی کا مضمون خاص طور پر ان طلباء کے لیے تیار کیا گیا ہے جنہوں نے اوپر کی جماعتوں میں ریاضی اور سائنس کا خصوصی مطالعہ کرنے کی بجائے سوشل سائنس کا مطالعہ کرنا ہوتا ہے۔ جزل ریاضی کا نصاب خاص طور پر آرٹس گروپ اور علوم شریعہ کے طالب علموں کو مد نظر رکھ کر تیار کیا گیا ہے تاکہ وہ عملی زندگی میں حساب کتاب میں مہارت حاصل کر لیں۔ جزل ریاضی کے نصاب میں کاروباری ریاضی، مالیاتی ریاضی، صارفین کی ریاضی اور بنیادی شماریات جیسے مضامین شامل کیے گئے ہیں۔ اس نئے نصاب کے پرانے نصاب کے مقابلے میں بہت کم وقت دینا پڑے گا اور اس سے جو وقت بچے گا وہ دوسرے مضامین کے مطالعہ میں صرف ہو سکے گا۔

مصنفین اور مدیران نے اس کتاب کی تیاری میں بہت محنت کی ہے اور اسے قومی نصاب ۲۰۰۶ء کے مطابق تیار کیا ہے۔ معلمین، طلبہ اور ان کے والدین سے درخواست ہے کہ اس کتاب (جزل ریاضی) کا گہرا تنقیدی مطالعہ کریں اور اغلاط اور خامیوں سے مطلع کریں۔ ان کا یہ اقدام یقیناً بہت بڑا قومی خدمت ہوگا۔

ناشر
محبوب علی عاصم

اس کتاب کو پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ لاہور نے ناشر سے پرنٹ لائسنس حاصل کر کے سرکاری سکولوں میں مفت تقسیم کے لیے بھی طبع کیا ہے۔
ناشر کی تحریری اجازت کے بغیر اس کتاب کا کوئی حصہ کسی امدادی کتاب، خلاصہ، ماڈل پیپر یا گائیڈ وغیرہ میں شامل نہیں کیا جاسکتا۔

جَنرل ریاضی

10



ہشتم، علمی - برادران

پنجاب پلازہ پمپلی منڈی اردو بازار لاہور

فون: 042-37242233 فیکس: 042-37361207

ویب سائٹ www.alibrotheran.com ای میل info@alibrotheran.com

جملہ حقوق بحق ناشر علی برادران لاہور محفوظ ہیں۔
برطانیق قومی نصاب 2006ء اور نیشنل ٹیکسٹ بک اینڈ لرننگ میٹریلز پالیسی 2007ء
منظور کر رہے: پنجاب کریکولم اتھارٹی (پنجاب) لاہور
بذریعہ مراسلہ نمبر PCA-12/19 تاریخ 27 نومبر 2012

ممبران ریو کیٹی

فہرست

ڈاکٹر طارق محمود ڈی۔ای۔اے۔ کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک ونگ (وزارت کھول ڈیپنٹ اتھارٹی۔ اسلام آباد)	ڈاکٹر بشری سینئر ہیڈ مشنریس (گورنمنٹ مسلم ماڈل گرلز ہائی سکول، گوجرانوالہ)
پروفیسر ڈاکٹر ایم۔اسلم شعبہ ریاضی (قائد اعظم یونیورسٹی اسلام آباد)	فہیم حسین سینئر ماہر مضمون (پنجاب کریکولم اینڈ ٹیکسٹ بک بورڈ لاہور)
پروفیسر ڈاکٹر شاہد مبین شعبہ ریاضی (سرگودھا یونیورسٹی سرگودھا)	افضل حسین ڈیک آفیسر (پنجاب کریکولم اتھارٹی لاہور)
منور دین اعوان اے۔ای۔اے۔(ر) کریکولم ونگ (وفاقی وزارت تعلیم (ڈی ٹکٹ) اسلام آباد)	
پروفیسر ڈاکٹر ایم۔اسلم ملک شعبہ ریاضی (پنجاب یونیورسٹی، قائد اعظم کیمپس لاہور)	

صفحہ نمبر	عنوانات	ہدف نمبر
1	الجبری کلیے اور ان کے اطلاق	1
35	تجزی	2
57	الجبری حسابات	3
85	یک درجی مساوات اور غیر مساوات	4
107	دو درجی مساوات	5
127	قالب اور مقطع	6
175	جیومیٹری کے بنیادی تصورات	7
221	عملی جیومیٹری	8
247	رقبہ اور حجم	9
275	محداتی جیومیٹری کا تعارف	10
289	جوابات	
301	فرہنگ	
306	علامات	
307	انڈیکس	

مقصود رضا احمد (ایم ایس سی، ایم فل)

ڈاکٹر محمد عذیر احمد (پی۔ ایچ۔ ڈی)

محمد اقبال باقر (ایم ایس سی)

جاوید اقبال (ایم ایس سی)

جاوید اقبال (ایم ایس سی)

کمپوزنگ اینڈ ڈیزائننگ: کاشف لطیف۔ محمد طاہر

محبوب علی عاصم

علی برادران پبلشرز اینڈ پرنٹرز لاہور

علی برادران پنجاب پلازہ اردو بازار لاہور

تاریخ اشاعت	ایڈیشن	بار	تعداد	قیمت
مارچ 2019ء	پنجم	اول	25000	147.00

ALGEBRAIC FORMULAS AND APPLICATIONS

الجبری کلیے اور ان کا اطلاق

◀ الجبری جملے ▶ الجبری کلیے ▶ مقادیر اہم اور ان کا اطلاق ▶ ناطق بنانا

اس یونٹ کی تکمیل کے بعد طلبہ اس قابل ہو جائیں گے کہ وہ:

- ◀ ایک ناطق جملہ، ناطق عدد ہوتا ہے۔
- ◀ ایک ناطق جملہ دو کثیر درجی جملوں $p(x)$ اور $q(x)$ کا حاصل قسمت $\frac{p(x)}{q(x)}$ کی صورت میں ظاہر جبکہ $q(x)$ غیر صفر کثیر درجی ہوتا ہے۔
- ◀ یہ مشاہدہ کر لیں کہ دیا گیا الجبری جملہ ایک • کثیر درجی جملہ ہے یا نہیں • ناطق جملہ ہے یا نہیں
- ◀ $\frac{p(x)}{q(x)}$ کو ایک مختصر ترین درجہ والی رقوم میں لکھ سکیں۔ جبکہ $p(x)$ اور $q(x)$ جملوں کے عددی سر صحت اعداد ہوں اور کوئی مشترک جزو ضربی نہ ہوں۔

- ◀ مشاہدہ کر سکیں کہ دیا گیا ناطق جملہ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں۔
- ◀ دیے گئے ناطق جملہ کو مختصر ترین رقوم میں ظاہر کرنا۔
- ◀ ایک ناطق جملہ کو دوسرے ناطق جملہ سے تقسیم کرنا اور حاصل شدہ رقوم کو مختصر ترین صورت میں لکھنا۔
- ◀ الجبری جملہ کی کسی خاص حقیقی عدد کے لیے قیمت معلوم کر سکیں۔

◀ کلیے $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ ، $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$ جان سکیں۔

◀ $(a-b)$ ، $(a+b)$ کی قیمتیں معلوم ہوں تو $a^2 + b^2$ اور ab کی قیمت معلوم کر سکیں۔

◀ کلیے $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ کو جان سکیں

◀ $a^2 + b^2 + c^2$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a+b+c$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔

◀ $a+b+c$ کی قیمت معلوم کر سکیں جبکہ $a^2 + b^2 + c^2$ اور $ab+bc+ca$ کی قیمتیں دی گئی ہوں۔

◀ کلیے $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab(a \pm b) \pm b^3$ ، $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ حاصل کر سکیں۔

◀ $a^3 \pm b^3$ کی قیمتیں معلوم کر سکیں $a \pm b$ اور ab دیے گئے ہوں۔ • تسلسل حاصل ضرب $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)(x - y)(x + y)$ معلوم کر سکیں۔

◀ مقادیر اہم کی پہچان اور ان کا

◀ دوسرے درجہ کی مقادیر اہم کی وضاحت کرنا۔ دوسرے درجہ کی مقادیر اہم پر بنیادی عوامل استعمال کرتے ہوئے ان کے بخارج کو ناطق بنانا اور قیمت معلوم کر سکیں۔

◀ کی طرح کے حقیقی اعداد سے ناطق بنانے کی وضاحت کر سکیں۔ جبکہ 'x' اور 'y' قدرتی اعداد

اور 'a'، 'b' صحیح اعداد ہوں۔

1.1 الجبری جملے: ALGEBRAIC EXPRESSIONS

الجبرا حساب کی توسیع ہے الجبرا میں a, b, c جیسے حروف تجزی مستقل مقداروں کو ظاہر کرتے ہیں اور x, y, z کو ہم قابل انتخاب عددی قیمت کیلئے استعمال کرتے ہیں۔

الجبری جملے میں اعداد اور حروف تجزی عوامل کی علامتوں $+, -, \times, \div$ کے ساتھ استعمال ہوتے ہیں جبکہ علامات $+$ اور $-$ الجبری جملے کی قوم (Terms) کو جدا کرتی ہیں۔

مثال:

2 رقموں (Terms) پر مشتمل ہے	$ax + by$
2 رقموں (Terms) پر مشتمل ہے	$3x - 2y$
3 رقموں (Terms) پر مشتمل ہے	$9x^2 - 7xy + 7y^2$
1 رقم (Term) پر مشتمل ہے	$5xy$

درج بالا میں اعداد $a, b, 3, 2, 9, 7, 5$ ان جملوں میں عددی سرکہلاتے ہیں جبکہ x, y متغیرات کہلاتے ہیں۔ ایک الجبری جملہ تین طرح کا ہوتا ہے۔

(i) کثیررقمی Polynomial (ii) ناطق جملہ Rational (iii) غیر ناطق جملہ Irrational

x متغیر میں 'n' درجہ کی کثیررقمی یوں لکھی جاتی ہے۔

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

جبکہ 'n' ایک غیر منفی عدد ہے اور $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_3, a_2, a_1, a_0$ حقیقی اعداد ہیں۔ جبکہ $a_n \neq 0$ چونکہ متغیر 'x' کا سب سے بڑا قوت نما 'n' ہے لہذا اس کثیررقمی کا درجہ 'n' ہے۔

1.1.1 ناطق جملے: Rational Expressions

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{p}{q}$ کی طرز کا عدد جس میں $(p, q \in \mathbb{Z} \text{ اور } q \neq 0)$ ناطق عدد کہلاتا ہے۔

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی طرز میں لکھا گیا ایک جملہ (جس میں $Q(x) \neq 0$ جبکہ $P(x)$ اور $Q(x)$ متغیر x میں کثیر رقمیاں ہیں) ایک ناطق جملہ کہلاتا ہے۔

مثال:

$$(i) \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 + 3} \quad (ii) \frac{x^3 + 8}{x + 1} \quad (iii) \frac{2x^2 + 3x + 3}{x^2 + x + 2} \quad (iv) \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 3}$$

ناطق جملہ کہلاتے ہیں۔ ناطق جملے، ناطق اعداد کی طرح جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کیے جاسکتے ہیں۔

ناطق جملے دو طرح کے ہوتے ہیں۔

(i) واجب ناطق جملے

(ii) غیر واجب ناطق جملے

واجب ناطق جملے: Proper Rational Expressions

ایک ناطق جملہ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ واجب ناطق جملہ کہلاتا ہے اگر $P(x)$ کا درجہ (degree) $Q(x)$ کے درجے سے کم ہو۔

مثال:

$$\text{واجب ناطق جملے ہیں } \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 7}, \frac{3x^3 + 4x^2 + 5}{2x^4 + 1}$$

غیر واجب ناطق جملے: Improper Rational Expressions

ایک ناطق جملہ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ جس میں $P(x)$ کا درجہ (degree) $Q(x)$ کے درجے کے برابر یا اس کے درجے سے بڑا ہو غیر واجب ناطق جملہ کہلاتا ہے۔

مثال:

$$\text{غیر واجب ناطق جملے ہیں } \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 1}, \frac{x^2 + 4x + 9}{x^2 + 1}, \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 4}, \frac{x + 5}{x - 1}$$

1.1.3 - دیے گئے الجبری جملہ کا مشاہدہ Examine a Given Algebraic Expression

درج ذیل جملوں پر غور کیجیے۔

$$(i) 2x^2 + 3x + 9$$

$$(ii) x + 5$$

$$(iii) \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1$$

$$(iv) \frac{-4}{x^3}$$

(i) اور (ii) کثیر رقمی ہیں لیکن (iii) اور (iv) کثیر رقمی نہیں۔ کیونکہ (iii) اور (iv) متغیرات کے قوت مناسب اعداد نہیں ہیں۔

درج ذیل پر بھی غور کیجیے۔

$$(i) \frac{x+1}{x^3+x^2+3}$$

$$(ii) \frac{x^3+1}{x-1}$$

$$(iii) \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + 1$$

$$(iv) 2\sqrt{y} + \frac{3}{\sqrt{x}} + 1$$

$$(v) \frac{\sqrt{y}+3}{x^{2/3}}$$

(i) اور (ii) ناطق جملے ہیں لیکن (iii) اور (iv) اور (v) ناطق جملے نہیں ہیں۔ کیونکہ متغیرات کے قوت مناسب اعداد ہیں۔

1.1.4 - ناطق جملے اپنی مختصر ترین شکل میں

Rational Expressions in its Lowest Terms

اگر A, B, C کثیر رقمی ہوں جبکہ $B, C \neq 0$ ہو تو $\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$ (جو کہ کسور کا بنیادی قانون کہلاتا ہے)

اس اصول کو ناطق جملوں کو مختصر ترین شکل میں تبدیل کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

ایک ایسا ناطق جملہ جس کے شمار کنندہ اور مخارج میں '1' اور -1 کے علاوہ کوئی مشترک جزو نہ ہو اپنی مختصر ترین شکل میں کہلاتا ہے۔

یہ جاننے کے لیے کہ کوئی جملہ اپنی مختصر ترین شکل میں ہے یا نہیں، ہم دی گئی مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال:- $\frac{8x^3y^2}{12xy^5}$ کی مختصر ترین شکل معلوم کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}\frac{8x^3y^2}{12xy^5} &= \frac{2x^2 \cdot 4xy^2}{3y^3 \cdot 4xy^2} \\ &= \frac{2x^2}{3y^3}\end{aligned}$$

پس کسی بھی ناطق جملے کو مختصر ترین شکل میں تبدیل کرنے کے لیے سب سے پہلے ہم شمار کنندہ اور مخرج کے اجزائے ضربی بناتے ہیں اور اس کے بعد کسروں کے بنیادی اصول کی مدد سے مطلوبہ جملہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{b^2 - a^2}{b^3 - a^3} &= \frac{(b - a)(b + a)}{(b - a)(b^2 + ab + a^2)} \\ &= \frac{b + a}{b^2 + ab + a^2}\end{aligned}$$

مثلاً

Reduce a Rational Expression to its Lowest Terms

1.1.5- ناطق جملوں کا اختصار

مثال:- مختصر ترین شکل میں تبدیل کریں۔

(i) $\frac{32x^5x^7}{-4x^2y^9}$

(ii) $\frac{2 - x}{3x^2 - 5x - 2}$

(i) $\frac{32x^5y^7}{-4x^2y^9}$

(ii) $\frac{2 - x}{3x^2 - 5x - 2}$

$$= -\frac{8x^3 \cdot 4x^2y^7}{y^2 \cdot 4x^2y^7}$$

$$= -\frac{8x^3}{y^2}$$

$$= \frac{2 - x}{3x^2 - 6x + x - 2}$$

$$= \frac{2 - x}{3x(x - 2) + 1(x - 2)}$$

$$= \frac{2 - x}{(3x + 1)(x - 2)}$$

$$= \frac{(-1)(x - 2)}{(3x + 1)(x - 2)}$$

$$= \frac{-1}{3x + 1}$$

حل:

Sum, Difference and Product of Rational Expressions

1.1.6- ناطق جملوں کی جمع، تفریق اور ضرب

ہم ناطق جملوں کی جمع، تفریق اور ضرب درج ذیل مثالوں سے دیکھتے ہیں۔

مثال 1:-

حل کریں۔

$$(i) \quad \frac{x+1}{x^2-3x+2} + \frac{x+2}{x^2-4x+3}$$

$$(ii) \quad \frac{x+2}{x^3+1} + \frac{x}{x^2-1}$$

$$(i) \quad \frac{x+1}{x^2-3x+2} + \frac{x+2}{x^2-4x+3}$$

حل:

$$= \frac{x+1}{x^2-2x-x+2} + \frac{x+2}{x^2-3x-x+3}$$

$$= \frac{x+1}{x(x-2)-1(x-2)} + \frac{x+2}{x(x-3)-1(x-3)}$$

$$= \frac{x+1}{(x-2)(x-1)} + \frac{x+2}{(x-3)(x-1)}$$

$$= \frac{(x+1)(x-3) + (x+2)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{x^2-3x+x-3+x^2-2x+2x-4}{(x^2-2x-x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{2x^2-2x-7}{(x^2-3x+2)(x-3)}$$

$$= \frac{2x^2-2x-7}{x^3-6x^2+11x-6}$$

$$\begin{aligned}
 (ii) \quad & \frac{x+2}{x^3+1} + \frac{x}{x^2-1} = \\
 & = \frac{x+2}{(x+1)(x^2-x+1)} + \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \\
 & = \frac{(x+2)(x-1) + x(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)(x^2-x+1)} = \\
 & = \frac{x^2+2x-x-2+x^3-x^2+x}{(x^2-1)(x^2-x+1)} = \\
 & = \frac{x^3+2x-2}{x^4-x^3+x^2-x^2+x-1} = \\
 & = \frac{x^3+2x-2}{x^4-x^3+x-1}
 \end{aligned}$$

مثال 2:-

حل کریں۔

$$(i) \quad \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{x-1}{x+2}$$

$$(ii) \quad \frac{x+5}{x^2-6x} - \frac{x}{x-6}$$

$$(i) \quad \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{x-1}{x+2}$$

حل:

$$\begin{aligned}
 & = \frac{x+3}{(x-2)(x+2)} - \frac{x-1}{x+2} = \\
 & = \frac{(x+3)(1) - (x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{x+3-(x^2-2x-x+2)}{x^2-4}$$

$$= \frac{x+3-x^2+3x-2}{x^2-4}$$

$$= \frac{4x-x^2+1}{x^2-4}$$

$$= \frac{1+4x-x^2}{x^2-4}$$

$$(ii) \frac{x+5}{x^2-6x} - \frac{x}{x-6}$$

$$= \frac{x+5}{x(x-6)} - \frac{x}{x-6}$$

$$= \frac{x+5-x \cdot x}{x(x-6)}$$

$$= \frac{x+5-x^2}{x^2-6x}$$

$$= \frac{5+x-x^2}{x^2-6x}$$

مثال 3:-

مختصر کریں۔

$$(i) \frac{x^2+x}{x^2-x} \times \frac{x-1}{x^3+1}$$

$$(ii) \frac{2x^2}{2x-1} \times \frac{2x-1}{6x+1}$$

$$(i) \frac{x^2+x}{x^2-x} \times \frac{x-1}{x^3+1}$$

$$= \frac{x(x+1)}{x(x-1)} \times \frac{x-1}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

حل:

$$= \frac{x(x+1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{1}{x^2-x+1}$$

$$(ii) \frac{2x^2}{2x-1} \times \frac{2x-1}{6x+1}$$

$$= \frac{2x^2(2x-1)}{(2x-1)(6x+1)}$$

$$= \frac{2x^2}{6x+1}$$

1.1.7- ناطق جملوں کی تقسیم: Division of Rational Expressions

ناطق جملوں کی تقسیم کا طریقہ یہ ہے کہ پہلے جملوں کے شمار کنندہ اور مخارج کے اجزائے ضربی بنائیں۔ پھر ان میں سے مشترک (یکساں) جملے کاٹ دیں۔

مثال:-

مختصر کیجیے۔

$$(i) \frac{x^2-2x}{x+1} \div \frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$$

$$(ii) \frac{3x-1}{1+x} \div \frac{1-3x}{x^2+2x+1}$$

$$(i) \frac{x^2-2x}{x+1} \div \frac{x^2-4}{x^2+2x+1}$$

$$= \frac{x(x-2)}{x+1} \div \frac{(x-2)(x+2)}{(x+1)^2}$$

حل:

$$= \frac{x(x-2)}{x+1} \times \frac{(x+1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x(x+1)}{x+2}$$

$$= \frac{x^2+x}{x+2}$$

$$(ii) \frac{3x-1}{1+x} \div \frac{1-3x}{x^2+2x+1}$$

$$= \frac{3x-1}{1+x} \div \frac{1-3x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3x-1}{1+x} \times \frac{(x+1)(x+1)}{1-3x}$$

$$= \frac{(3x-1)(x+1)}{(1-3x)}$$

$$= \frac{(3x-1)(x+1)}{-(3x-1)}$$

$$= -(x+1)$$

1.1.8 - الجبری جملے کی قیمت Value of an Algebraic Expression

اگر کسی کثیر رقمی $P(x)$ میں 'x' کی جگہ کوئی حقیقی عدد رکھیں تو ہمیں ایک حقیقی عدد حاصل ہوتا ہے۔ یہ حقیقی عدد، $P(x)$ کی قیمت کہلاتی ہے۔ اگر $a \in R$ ہو تو $P(x)$ کی قیمت $P(a)$ ہوگی۔

مثال کے طور پر:

اگر $P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5x + 1$ ہو تو $P(x)$ کی قیمت معلوم کریں۔ اگر $x = 1$ ، (ii) $x = 2$

$$P(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5x + 1$$

$$(i) P(1) = 4(1)^3 + 3(1)^2 + 5(1) + 1$$

$$= 4 + 3 + 5 + 1$$

$$= 13$$

$$P(1) = 13$$

$$(ii) P(2) = 4(2)^3 + 3(2)^2 + 5(2) + 1$$

$$= 32 + 12 + 10 + 1 = 55$$

$$P(2) = 55$$

پس

مثال 1:-

اگر $P(x) = 4x^4 + 3x^2 - 5x + 1$ ہو تو $P(-1)$ معلوم کریں۔

حل:

$$P(x) = 4x^4 + 3x^2 - 5x + 1$$

$$P(-1) = 4(-1)^4 + 3(-1)^2 - 5(-1) + 1$$

$$= 4 + 3 + 5 + 1$$

$$= 13$$

مثال 2:-

اگر $P(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 8}$ ہو تو $P(1)$ معلوم کریں۔

حل:

$$P(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 8}$$

$$P(1) = \frac{1^2 - 5(1) + 6}{1^3 + 8} = \frac{1 - 5 + 6}{1 + 8}$$

$$= \frac{2}{9}$$

مشق 1.1

حل کریں۔

1- اگر $P(x) = x^4 + 3x^2 - 5x + 9$ ہو تو $x = 0$ اور $x = 1$ کے لیے $P(x)$ کی قیمت معلوم کریں۔

2- اگر $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ ہو تو $P(-2)$ معلوم کریں۔

3- اگر $P(y) = 3y^2 + \frac{y}{4} + 9$ ہو تو $P(0)$ معلوم کریں۔

4- اگر $P(x) = 9x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ ہو تو $P(1)$ اور $P(2)$ معلوم کریں۔

5- اگر $P(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x + 1}$ ہو تو $P(1)$ اور $P(2)$ معلوم کریں۔

6- اگر $P(r) = 2\pi r$ ہو تو $r = 3$ اور $\pi = \frac{22}{7}$ کے لیے $P(r)$ معلوم کریں۔

7- اگر $P(r) = 4\pi r^2$ ہو تو $r = 8$ اور $\pi = \frac{22}{7}$ کے لیے $P(r)$ معلوم کریں۔

8- اگر $P(y) = y^4 + \frac{3y^3}{2} - y^2 + 1$ ہو تو $y = 2$ اور $y = -2$ کے لیے $P(y)$ معلوم کریں۔

دیے گئے ناطق جملوں کو ان کی مختصر ترین شکل میں تبدیل کیجیے۔

$$9- \frac{8x^2y^2}{12x^4y}$$

$$10- \frac{25a^3b^2}{14a^2b^4}$$

$$11- \frac{16a^6b^7}{12a^3b^5 + 20a^5b^4}$$

$$12- \frac{18m^5x^3}{27m^4x^8 - 36m^6x^6}$$

$$13- \frac{5c - 5d}{c^2 - d^2}$$

$$14- \frac{x^2 - y^2}{3y - 3x}$$

مختصر کیجیے۔

$$15- \frac{x}{x-y} + \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

$$16- \frac{x^2+2x}{x^2+x-2} + \frac{3x}{x+1}$$

$$17- \frac{x+2}{x^2+3x+2} - \frac{x-5}{x^2-x-6}$$

$$18- \frac{8x^2+18y^2}{4x^2-9y^2} - \frac{2x+3y}{2x-3y}$$

$$19- \frac{x}{x^2+xy} - \frac{y}{x^2-y^2}$$

$$20- \frac{x+y}{xy+y^2} - \frac{x}{x^2-xy}$$

$$21- \frac{(x+1)^2}{x^2-1} - \frac{x^2+1}{x^2+1}$$

$$22- \frac{5x}{x-9} + \frac{x^2-2x+1}{x^2-12x+27} - \frac{6x}{x-3}$$

$$23- \frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \div \frac{x}{x-2}$$

$$24- \frac{x^2-36}{x^2-1} \div \frac{x-6}{1-x}$$

$$25- \frac{x^2-5x}{x-1} \div \frac{x^2-25}{x^2+x+20}$$

$$26- \frac{2x^2-5x-12}{4x^2+4x-3} \div \frac{2x^2-7x-4}{6x^2+5x-4}$$

$$27- \frac{x(2x-1)^2}{2x^2-1} \div \frac{4x^2-1}{4x^2+4x+1}$$

$$28- \frac{x^2+x}{x^2-1} \times \frac{x+1}{x^3+1}$$

$$29- \frac{x^2-9}{x^2-6x+9} \times \frac{x}{3x+9}$$

$$30- \frac{x+5}{x^2+6x} \times \frac{x^3+6x^2}{x+5}$$

$$31- \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} \times \frac{x+1}{x-1}$$

$$32- \frac{x^2+4x+3}{x+3} \times \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$$

1.2 FORMULAE کلیے

ایک کلیہ، الجبری شکل میں ایک قانون کو ظاہر کرتا ہے جبکہ کلیے اس کی جمع ہیں۔

1.2.1- کلیہ 1

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$L.H.S = (a+b)^2 + (a-b)^2 \quad \text{ثبوت:}$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2$$

$$= 2a^2 + 2b^2$$

$$= 2(a^2 + b^2)$$

$$= R.H.S$$

کلیہ 2

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$L.H.S = (a+b)^2 - (a-b)^2 \quad \text{ثبوت:}$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2$$

$$= 4ab$$

$$= R.H.S$$

مثال 1:-

$a^2 + b^2$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a+b = 8$ اور $ab = 12$

$$a+b = 8 \quad \text{چونکہ}$$

حل:

دونوں اطراف مربع لینے سے

$$(a+b)^2 = (8)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 64$$

$$a^2 + b^2 = 64 - 2ab$$

$$= 64 - 2(12) \quad \because ab = 12$$

$$= 64 - 24$$

$$a^2 + b^2 = 40$$

علامت "∴" کا مطلب ہے کیونکہ

مثال 2:-

ab کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a + b = 9$ اور $a - b = 3$

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

$$(9)^2 - (3)^2 = 4ab$$

$$81 - 9 = 4ab$$

$$4ab = 72$$

$$ab = \frac{72}{4}$$

$$ab = 18$$

1.2.2 - کلیہ 3

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$p = a + b \quad \text{فرض کیا}$$

$$L.H.S = (a + b + c)^2 = (p + c)^2$$

$$= p^2 + 2pc + c^2$$

$$= (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2 \quad (p = a + b)$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$= R.H.S$$

مثال 3:-

$a^2 + b^2 + c^2$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a + b + c = 12$ اور $ab + bc + ca = 8$

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$(12)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(8)$$

$$144 = a^2 + b^2 + c^2 + 16$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 128$$

مثال 4:-

اگر $ab + bc + ca = 22$ اور $a^2 + b^2 + c^2 = 100$ جبکہ $a + b + c$ کی قیمت معلوم کیجیے

حل: ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$$

$$= 100 + 2(22)$$

$$= 100 + 44$$

$$(a + b + c)^2 = 144$$

$$(a + b + c)^2 = (12)^2$$

$$a + b + c = \pm 12$$

نتائج
(i) $x^2 = a^2$ $x = \pm a$
(ii) $x^2 = a$ $x = \pm \sqrt{a}$

مثال 5:-

اگر $ab + bc + ca = 8$ اور $a^2 + b^2 + c^2 = 36$ جبکہ $a + b + c$ کی قیمت معلوم کریں

حل:- ہمیں معلوم ہے کہ

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$8^2 = 36 + 2(ab + bc + ca)$$

$$64 - 36 = 2(ab + bc + ca)$$

$$2(ab + bc + ca) = 28$$

$$ab + bc + ca = \frac{28}{2} \quad (\text{دونوں اطراف کو 2 پر تقسیم کرنے سے})$$

$$ab + bc + ca = 14$$



1.2.3 - کلیہ 4

$$(a+b)^3 = a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$$L.H.S = (a+b)^3$$

$$= (a+b)^2 (a+b)$$

$$= (a^2 + 2ab + b^2) (a+b)$$

$$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + b^2a + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3ab(a+b) + b^3$$

$$= R.H.S$$

کلیہ 5

$$(a-b)^3 = a^3 - 3ab(a-b) - b^3$$

$$L.H.S = (a-b)^3$$

$$= (a-b)^2 (a-b)$$

$$= (a^2 - 2ab + b^2) (a-b)$$

$$= a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + b^2a - b^3$$

$$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \quad (\because ab^2 = b^2a)$$

$$= a^3 - 3ab(a-b) - b^3$$

$$= R.H.S$$

کلیہ 6

$$a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$$

$$R.H.S = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$$

$$= a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3$$

$$= L.H.S$$

کلیہ 7

$$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

$$R.H.S = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

$$= a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$$

$$= a^3 - b^3$$

$$= L.H.S$$

مثال 6:-

$x^3 + y^3$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $xy = 8$ اور $x + y = 5$

$$x + y = 5$$

حل:

$$(x + y)^3 = (5)^3 \quad (\text{دونوں اطراف کا مکعب لینے سے})$$

$$x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = 125$$

$$x^3 + y^3 + 3(8)(5) = 125 \quad (x + y = 5 \text{ اور } xy = 8 \text{ رکھنے سے})$$

$$x^3 + y^3 + 120 = 125$$

$$x^3 + y^3 = 125 - 120$$

$$\therefore x^3 + y^3 = 5$$

مثال 7:-

$a^3 - b^3$ کی قیمت معلوم کریں جبکہ $a - b = 6$ اور $ab = 7$

حل:

$$a - b = 6$$

$$(a - b)^3 = (6)^3 \quad (\text{دونوں اطراف کا مکعب لینے سے})$$

$$a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = 216$$

$$a^3 - b^3 - 3(7)(6) = 216$$

$$a^3 - b^3 - 126 = 216$$

$$a^3 - b^3 = 216 + 126$$

$$a^3 - b^3 = 342$$

مثال 8:-

$x^3 p^2 - 8y^3 p^2 - 4x^3 q^2 + 32y^3 q^2$ کے اجزائے ضربی بنائیے۔

حل:

$$x^3 p^2 - 8y^3 p^2 - 4x^3 q^2 + 32y^3 q^2 \quad (\text{رقوم کی ترتیب بدلنے سے})$$

$$= p^2(x^3 - 8y^3) - 4q^2(x^3 - 8y^3)$$

$$= (p^2 - 4q^2)(x^3 - 8y^3)$$

$$= [(p)^2 - (2q)^2] [(x)^3 - (2y)^3]$$

$$= (p - 2q)(p + 2q)(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$$

مثال 9:-

$64x^6 - 729y^6$ کے اجزائے ضربی بنائیے۔

حل:

$$64x^6 - 729y^6 = 2^6 x^6 - 3^6 y^6$$

$$= (2x)^6 - (3y)^6$$

$$= [(2x)^3]^2 - [(3y)^3]^2$$

$$= [(2x)^3 - (3y)^3] [(2x)^3 + (3y)^3]$$

$$= (2x - 3y)[4x^2 + 6xy + 9y^2](2x + 3y)[4x^2 - 6xy + 9y^2]$$

علامت "∴" کا مطلب ہے "لہذا"

مثال 10:-

$(x+y)^3 + 64$ کے اجزائے ضربی بنائیے۔

حل:

$$\begin{aligned}(x+y)^3 + 64 &= (x+y)^3 + (4)^3 \\ &= (x+y+4) \left[(x+y)^2 - (x+y)4 + (4)^2 \right] \\ &= (x+y+4) \left[x^2 + y^2 + 2xy - 4x - 4y + 16 \right]\end{aligned}$$

مثال 11:-

$x^6 - y^6$ مسلسل حاصل ضرب معلوم کیجیے۔

حل:

$$\begin{aligned}x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 \\ &= (x^3 + y^3) (x^3 - y^3) \\ &= (x+y) (x^2 - xy + y^2) (x-y) (x^2 + xy + y^2) \\ &= (x+y) (x-y) (x^2 - xy + y^2) (x^2 + xy + y^2)\end{aligned}$$

مشق 1.2

درج ذیل سوالات فارمولوں کی مدد سے حل کریں۔

1. $(x+2y)^2 + (x-2y)^2$

2. $(5x+3y)^2 + (5x-3y)^2$

3. $(3l+2m)^2 - (3l-2m)^2$

4. $(l+m)(l-m)(l^2+m^2)(l^4+m^4)$

$$(2x+3y+2)^2 \quad .6$$

$$(ab - \frac{1}{ab})^3 \quad .5$$

$$(3p+q+r)^2 \quad .8$$

$$(2p+q)^3 \quad .7$$

$$(x+y)^3 - 1 \quad .10$$

$$(2x+3y)^3 \quad .9$$

$$8x^3 + 27y^3 \quad .12$$

$$(x-y)^3 + 64 \quad .11$$

$$64a^6 - b^6 \quad .14$$

$$x^6 - 729y^6 \quad .13$$

$$ab = -5 \text{ اور } a - b = 4 \text{ جبکہ } a^3 - b^3 \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .15$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - \left(z - \frac{1}{z}\right)^2 = 4 \text{ ثابت کیجیے۔} \quad .16$$

$$a - b = 3 \text{ اور } a + b = 5 \text{ جبکہ } ab \text{ اور } a^2 + b^2 \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .17$$

$$ab + bc + ca = 11 \text{ اور } a + b + c = 6 \text{ جبکہ } a^2 + b^2 + c^2 \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .18$$

$$xy = 10 \text{ اور } x + y = 7 \text{ جبکہ } x^3 + y^3 \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .19$$

$$x^2 + y^2 = 86 \text{ اور } xy = -16 \text{ جبکہ } (x - y)^2 \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .20$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 81 \text{ اور } a + b + c = 11 \text{ جبکہ } ab + bc + ca \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .21$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 32 \text{ اور } ab + bc + ca = 7 \text{ جبکہ } (a + b + c)^2 \text{ کی قیمت معلوم کیجیے۔} \quad .22$$

1.3 مقادیر اصم اور ان کا اطلاق SURDS AND THEIR APPLICATIONS

1.3.1 مقادیر اصم Surds

Rational Numbers : ناطق اعداد:

ایک عدد جس کو $\left(\frac{p}{q}\right)$ کی شکل میں بیان کیا جاسکے جبکہ 'p, q' صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$ ناطق عدد کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $\frac{3}{4}, \frac{2}{1}, \frac{8}{7}, \frac{-2}{5}$ تمام ناطق اعداد ہیں۔

Irrational Numbers : غیر ناطق اعداد:

ایک حقیقی عدد جو کہ ناطق عدد نہ ہو غیر ناطق عدد کہلاتا ہے۔

مثال کے طور پر $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$ وغیرہ تمام غیر ناطق اعداد ہیں۔

صاف ظاہر ہے کہ ایک غیر ناطق عدد کو $\left(\frac{p}{q}\right)$ کی شکل میں بیان نہیں کیا جاسکتا جبکہ 'p, q' صحیح اعداد ہوں اور $q \neq 0$

Real Numbers : حقیقی اعداد:

دو غیر مشترک ناطق اعداد کے سیٹ Q اور غیر ناطق اعداد کے سیٹ Q' کا یونین حقیقی اعداد کا سیٹ کہلاتا ہے۔

Surds of Radicals : جذر کی علامت والی مقادیر اصم:

جذر کی علامت پر مشتمل غیر ناطق عدد کو مقادیر اصم کہتے ہیں۔

مثال کے طور پر: $\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 4 + 3\sqrt{5}, 10 - 4\sqrt{6}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{9}{\sqrt{7}}$ تمام کی تمام مقادیر اصم ہیں۔

مثال:

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}} \quad \text{(i)} \quad \text{درجہ 2 کی مقادیر اصم ہے۔}$$

$$\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} \quad \text{(ii)} \quad \text{درجہ 3 کی مقادیر اصم ہے۔}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \quad \text{(iii)} \quad \text{درجہ n کی مقادیر اصم ہے۔ 'a' کو مجذور کہتے ہیں۔}$$

جذر کے قوانین Laws of Radicals

جیسا کہ مقدار اصرم کو ناطق قوت نمایں لکھا جاسکتا ہے۔ لہذا قوت نما کے قوانین کا بھی مقدار اصرم پر اطلاق ہوتا ہے۔
پس کسی بھی مثبت صحیح عدد 'n' اور مثبت ناطق اعداد 'a' اور 'b' کے لیے، ہمارے پاس درج ذیل قوانین ہیں۔

جذر کے قوانین	قوت نما کے قوانین
(i) $(\sqrt[n]{a})^n = a$	(i) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$
(ii) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$	(ii) $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$
(iii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	(iii) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$
(iv) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$	(iv) $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}}$

اصل مقدار اصرم: Pure Surds

ایسی مقدار اصرم جس کا جز و ضربی صرف '1' ہو اور دوسرا جز و ضربی غیر ناطق ہو۔ اصل مقدار اصرم کہلاتی ہے۔

مثال: $\sqrt{2}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt[4]{3}$ خالص مقدار اصرم ہیں۔

مخلوط مقدار اصرم: Mixed Surds

ایسی مقدار اصرم جس کا '1' کے علاوہ کوئی اور ناطق جز و ضربی ہو اور دوسرا جز و ضربی غیر ناطق ہو، مخلوط مقدار اصرم کہلاتی ہے۔

مثال: $2\sqrt{3}$, $5\sqrt{7}$ مخلوط مقدار اصرم ہیں۔

1.3.2 دوسرے درجہ کی مقادیر اصم: Surds of Second Order

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ ایک ایسی مقدار اصم ہے جس کا مرتبہ 2 ہے یعنی کہ دوسری درجہ کی مقدار اصم۔

یاد رکھئے:

علامت $\sqrt{\quad}$ جذر کی علامت ہے جس کا انڈیکس 2 ہے۔

مشابہ مقادیر اصم: Similar Surds

ایسی مقادیر اصم جن میں غیر ناطق جزو ضربی ایک جیسا ہو مشابہ مقادیر اصم کہلاتی ہیں۔

$\sqrt{3}, 5\sqrt{3}, \frac{1}{7}\sqrt{3}$ مشابہ مقادیر اصم ہیں۔

ایسی مقادیر اصم جن کے غیر ناطق جزو ضربی مختلف ہوں۔ مختلف مقادیر اصم کہلاتی ہیں۔

$\sqrt{2}, 3\sqrt{5}, 2\sqrt{3}$ مختلف مقادیر اصم ہیں۔

مقادیر اصم کی جمع اور تفریق: Addition and Subtraction of Surds

مشابہ مقادیر اصم کی جمع اور تفریق کی جاسکتی ہیں۔

$$(i) \quad 6\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = (6 + 5)\sqrt{3} = 11\sqrt{3} \quad \text{مثال:}$$

$$(ii) \quad 12\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = (12 + 4 - 6)\sqrt{5} = 10\sqrt{5}$$

مقادیر اصم کی ضرب اور تقسیم: Multiplication and Division of Two Surds

ایک ہی درجہ کی مقادیر اصم کو درج ذیل قوانین کے تحت ضرب دی جاسکتی ہے اور تقسیم کیا جاسکتا ہے۔

کسی بھی قدرتی اعداد 'm' اور 'n' کے لیے

$$(i) \quad \sqrt{m} \times \sqrt{n} = \sqrt{mn} \quad (ii) \quad \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}}$$

مثال 1: $\sqrt{8} \times \sqrt{2}$ کو مختصر کریں۔

حل: قانون " $\sqrt{m} \times \sqrt{n} = \sqrt{mn}$ " کے مطابق

$$\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{8 \times 2} = \sqrt{16} = 4$$

مثال 2:-

$\sqrt{180} \div \sqrt{24}$ کو مختصر کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}\sqrt{180} \div \sqrt{24} &= \frac{\sqrt{180}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{180}{24}} \left[\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{m}{n}} \text{ کے مطابق} \right] \\ &= \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 3}} \\ &= \sqrt{\frac{15}{2}}\end{aligned}$$

مخرج کو ناطق بنانا: Rationalizing The Denominator

ہم کسی کسر کو اس کے مخرج میں جذری علامت ختم کر کے مختصر کر سکتے ہیں۔ ہم ایسا کرنے کے لیے مخرج اور شمار کنندہ دونوں کو اس جذری رقم سے ضرب دیتے ہیں۔ یہ عمل مخرج کو ناطق بنانا کہلاتا ہے۔

مثال 1:- درج ذیل کو مختصر کریں۔

(a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{5}{7\sqrt{2}}$

حل: (a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ کو $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ سے ضرب دیں۔

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(b) $\frac{5}{7\sqrt{2}}$ کو $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ سے ضرب دیں۔

$$\frac{5}{7\sqrt{2}} = \frac{5}{7\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{7 \times 2} = \frac{5\sqrt{2}}{14}$$

مثال 2:-

$(5 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$ کو ضرب دیں۔

حل:

$$(2 + \sqrt{3})(5 - \sqrt{3})$$

$$= 2 \times 5 + 2 \times (-\sqrt{3}) + 5 \times \sqrt{3} + \sqrt{3}(-\sqrt{3})$$

$$= 10 - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3$$

$$= 7 + 3\sqrt{3}$$

مثال 3:- ضرب دیں۔

$$(3\sqrt{5} - 5\sqrt{2})(4\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$$

حل:

$$(3\sqrt{5} - 5\sqrt{2})(4\sqrt{5} + 3\sqrt{2})$$

$$= 12(\sqrt{5})^2 + 9\sqrt{5}\sqrt{2} - 20\sqrt{2}\sqrt{5} - 15(\sqrt{2})^2$$

$$= 12 \times 5 + 9\sqrt{10} - 20\sqrt{10} - 15 \times (2)$$

$$= 60 - 30 - 11\sqrt{10}$$

$$= 30 - 11\sqrt{10}$$

مثال 4:-

مختصر ترین شکل میں لکھیے۔

(i) $\sqrt{288}$ (ii) $\sqrt{147}$ (iii) $\sqrt{36a^3}$

(i) $\sqrt{288}$

حل:

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} \\
 &= \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{2} \\
 &= 2 \times 2 \times 3 \times \sqrt{2} \\
 &= 12\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

2	288
2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

(ii) $\sqrt{147}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{7 \times 7 \times 3} \\
 &= \sqrt{7 \times 7} \times \sqrt{3} \\
 &= 7\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

7	147
7	21
3	3
	1

(iii) $\sqrt{36a^3}$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{6 \times 6 \times a \times a \times a} \\
 &= \sqrt{6 \times 6} \times \sqrt{a \times a} \times \sqrt{a} \\
 &= 6 \times a \times \sqrt{a} \\
 &= 6a\sqrt{a}
 \end{aligned}$$

1.4 ناطق بنانا: RATIONALIZATION

دورقی مقدار اصرم: Binomial Surd

ایک ایسا دورقی جملہ جس میں کم از کم ایک رقم مقدار اصرم ہو۔ دورقی مقدار اصرم کہلاتی ہے۔

مثلاً $a + b\sqrt{x}$, $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ دورقی مقدار اصرم ہیں۔

دورقی مقدار اصرم کا کانجوگیٹ: Conjugate of Binomial Surds

(i) $a + b\sqrt{x}$ اور $a - b\sqrt{x}$

(ii) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ اور $\sqrt{x} - \sqrt{y}$

درج بالا ایسی مقدار اصرم کے جوڑے ہیں جن کا حاصل ضرب ایک ناطق جملہ ہے۔ مقدار اصرم کا ایسا جوڑا دورقی مقدار اصرم کا کانجوگیٹ کہلاتا ہے۔ جبکہ ان میں سے ہر ایک دوسرے کا کانجوگیٹ کہلاتا ہے۔

(i) $2 + 3\sqrt{5}$ کی کانجوگیٹ مقدار اصرم $2 - 3\sqrt{5}$ ہے۔

(ii) $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ کی کانجوگیٹ مقدار اصرم $\sqrt{3} - \sqrt{7}$ ہے۔

یاد رکھیے کہ: دورقی کانجوگیٹ ایک دوسرے کے ناطق ساز جزو ضربی کہلاتے ہیں۔

جزو ناطق Rationalizing Factor

جب دو مقدار اصرم کا حاصل ضرب ایک ناطق جملہ ہو تو وہ دونوں ایک دوسرے کا جزو ناطق ساز جزو ضربی کہلاتے ہیں۔

مثال :-

(i) $2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$ (جو کہ ناطق ہے)

$\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ کا ناطق ساز جزو ضربی ہے

(ii) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3 - 2 = 1$ (جو کہ ایک ناطق ہے)

لہذا $(\sqrt{3} + \sqrt{2})$ اور $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ ایک دوسرے کے ناطق ساز جزو ضربی ہیں۔

مقادیر اصم کو ناطق بنانا: Rationalization of Surds

کسی مقدار اصم کو مناسب ناطق ساز جزو سے ضرب دے کر اسے ناطق عدد میں تبدیل کرنے کا عمل مقدار اصم کو ناطق بنانا کہلاتا ہے۔

مثال 1:-

$$\frac{1}{5+2\sqrt{3}} \text{ کے مخرج کو ناطق بنائیے۔}$$

حل:-

$$= \frac{1}{5+2\sqrt{3}} \times \frac{5-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5-2\sqrt{3}}{5^2-(2\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{5-2\sqrt{3}}{25-12} = \frac{5-2\sqrt{3}}{13}$$

مثال 2:-

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \text{ کے مخرج کو ناطق بنائیے۔}$$

حل:

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$$

مثال 3:-

اگر $x = 3 + \sqrt{8}$ ہو تو درج ذیل کی قیمتیں معلوم کریں۔

$$(i) \frac{1}{x} \quad (ii) x + \frac{1}{x} \quad (iii) x - \frac{1}{x} \quad (iv) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$(v) \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \quad (vi) x^2 + \frac{1}{x^2} \quad (vii) x^2 - \frac{1}{x^2}$$

حل:

$$(i) \frac{1}{x} = \frac{1}{3 + \sqrt{8}}$$

$$= \frac{1}{3 + \sqrt{8}} \times \frac{3 - \sqrt{8}}{3 - \sqrt{8}}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{8}}{(3)^2 - (\sqrt{8})^2} = \frac{3 - \sqrt{8}}{9 - 8}$$

$$= 3 - \sqrt{8}$$

$$(ii) x + \frac{1}{x}$$

$$= (3 + \sqrt{8}) + (3 - \sqrt{8})$$

$$= 3 + \cancel{\sqrt{8}} + 3 - \cancel{\sqrt{8}}$$

$$= 6$$

$$(iii) x - \frac{1}{x}$$

$$= (3 + \sqrt{8}) - (3 - \sqrt{8})$$

$$= \cancel{3} + \sqrt{8} - \cancel{3} + \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{8}$$

$$(iv) \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 6^2 \quad (\text{ع (ii)})$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 36$$

$$(v) \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = (2\sqrt{8})^2 \quad (\text{ع (iii)})$$

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 32$$

$$(vi) x^2 + \frac{1}{x^2}$$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - 2$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) - 2$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$$

$$= 36 - 2 \quad (\text{ع (iv)})$$

$$= 34$$

$$(vii) x^2 - \frac{1}{x^2}$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(x - \frac{1}{x}\right) = 6(2\sqrt{8}) \quad (\text{ع (ii, iii)})$$

$$= 12\sqrt{8}$$

مشق 1.3

1. نخرج سے جذری علامت دور کیجیے۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$

2. درج ذیل جملوں کو مختصر کریں۔

(i) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ (ii) $4\sqrt{50} + \sqrt{200} + \sqrt{50}$
 (iii) $(\sqrt{12} - \sqrt{2})(\sqrt{20} - 3\sqrt{2})$ (iv) $(6 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{5})$
 (v) $(\sqrt{3} - 2)(5 - \sqrt{5})$ (vi) $(7 + \sqrt{3})(5 + \sqrt{2})$

3. درج ذیل کے خارج کو ناطق بنائیے۔

(i) $\frac{1}{\sqrt{3} + 2}$ (ii) $\frac{1}{4 - \sqrt{5}}$ (iii) $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$ (iv) $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$
 (v) $\frac{5\sqrt{7}}{2 + 3\sqrt{7}}$ (vi) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ (vii) $\frac{29}{11 + 3\sqrt{5}}$
 (viii) $\frac{17}{3\sqrt{7} + 2\sqrt{3}}$

4. اگر $x = \sqrt{5} + 2$ ہو تو (i) $x + \frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

5. اگر $x = 2 + \sqrt{3}$ ہو تو (i) $x - \frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

6. اگر $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ہو تو (i) $x - \frac{1}{x}$ اور (ii) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

7. اگر $\frac{1}{x} = 3 - \sqrt{2}$ ہو تو (i) $x + \frac{1}{x}$ اور (ii) $x - \frac{1}{x}$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

8. اگر $\frac{1}{p} = \sqrt{10} + 3$ ہو تو (i) $(p + \frac{1}{p})^2$ اور (ii) $(p - \frac{1}{p})^2$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

9. نخرج کو ناطق بنائیے۔ (i) $\frac{b + \sqrt{b^2 - a^2}}{b - \sqrt{b^2 - a^2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{a+3} - \sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3} + \sqrt{a-3}}$

جائزہ مشق-1

1- صحیح جوابات کے گرد دائرہ لگائیے۔

1. ایک $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی شکل کا الجبری جملہ جس میں $Q(x) \neq 0$ ہو جبکہ $P(x)$ اور $Q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں کہلاتا ہے۔

- | | |
|---------------|---------------------|
| (a) ناطق عدد | (b) ناطق جملہ |
| (c) مقدار اصم | (d) مخلوط مقدار اصم |

2. $(a+b)^2 - (a-b)^2 = ?$

- | | |
|--------------------|-----------------|
| (a) $2(a^2 + b^2)$ | (b) $4ab$ |
| (c) $-4ab$ | (d) $a^2 + b^2$ |

3. $(a+b)^2 + (a-b)^2 = ?$

- | | |
|------------|--------------------|
| (a) $-4ab$ | (b) $a^2 + b^2$ |
| (c) $4ab$ | (d) $2(a^2 + b^2)$ |

4. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = ?$

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (a) $(a-b)^3$ | (b) $(a+b)^3$ |
| (c) $a^3 - b^3$ | (d) $a^3 + b^3$ |

5. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = ?$

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (a) $a^3 - b^3$ | (b) $(a+b)^3$ |
| (c) $(a-b)^3$ | (d) $a^3 + b^3$ |

6. $a^3 + 3ab(a+b) + b^3 = ?$

- | | |
|-----------------|-----------------|
| (a) $(a+b)^3$ | (b) $(a-b)^3$ |
| (c) $a^3 + b^3$ | (d) $a^3 - b^3$ |

7. $a^3 - 3ab(a-b) - b^3 = ?$

- | | |
|-----------------|---------------|
| (a) $a^3 + b^3$ | (b) $(a+b)^3$ |
| (c) $a^3 - b^3$ | (d) $(a-b)^3$ |

8. ایک غیر ناطق عدد جس میں جذر کی علامت ہو، کہلاتا ہے

- | | |
|---------------------|---------------|
| (a) مخلوط مقدار اصم | (b) مقدار اصم |
| (c) ناطق عدد | (d) قدرتی عدد |

9. مقدار $\sqrt{a} = a^{1/2}$ کا درجہ ہے۔

- | | |
|-------|-------------------|
| (a) 0 | (b) 1 |
| (c) 2 | (d) $\frac{1}{2}$ |

10. مقدار $\sqrt{a}$ کو ضرب دی جاسکتی ہے اگر وہ ہوں۔

- | | |
|--------------------|-----------------|
| (a) یکساں درجہ کی | (b) دو درجہ کی |
| (c) مختلف درجوں کی | (d) n درجہ کی |

-II خالی جگہ پر کریں۔

1. ایک $\frac{p}{q}$ کی شکل کا عدد جس میں $p, q \in \mathbb{Z}$ اور $q \neq 0$ _____ کہلاتا ہے۔

2. $\frac{P(x)}{Q(x)}$ کی شکل کا جملہ جس میں $Q(x) \neq 0$ اور $P(x), Q(x)$ کثیر رقمیاں ہوں، _____ کہلاتا ہے۔

3. $(a+b)^2 - (a-b)^2 =$ _____

4. $(a+b)^2 + (a-b)^2 =$ _____

5. $a^3 + 3ab(a+b) + b^3 =$ _____

6. $a^3 - 3ab(a-b) - b^3 =$ _____

7. $(a-b)(a^2 + ab + b^2) =$ _____

8. $(a+b)(a^2 - ab + b^2) =$ _____

9. ایک غیر ناطق عدد جس میں جذری علامت ہو کہلاتا ہے۔ _____

10. $\sqrt{a} = a^{1/2}$ درجہ کی مقدار $\sqrt{a}$ کہلاتی ہے۔ _____

خلاصہ SUMMARY

کلیے: Formulae

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3ab(a \pm b) \pm b^3$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

مقدار اصرم: مقدار اصرم ایک غیر ناطق جملہ ہے جس میں جذری علامت پائی جاتی ہے۔

خالص مقدار اصرم: ایسی مقدار اصرم جس میں '1' ایک ناطق جز و ضربی ہو اور دوسرا جز و ضربی غیر ناطق ہو۔

مخلوط مقدار اصرم: ایسی مقدار اصرم جس میں '1' ایک کے علاوہ کوئی ناطق جز و ضربی ہو جبکہ دوسرا جز و ضربی غیر ناطق

ہو۔ مخلوط مقدار اصرم کہلاتی ہے۔

مشابہ مقدار اصرم: مقدار اصرم جن کا یکساں غیر ناطق جز و ضربی ہو، ہم شکل / یکساں مقادیر اصرم کہلاتی ہیں۔

غیر مشابہ مقدار اصرم: ایسی مقادیر اصرم جن میں غیر ناطق اجزائے ضربی مختلف ہوں۔ مشابہ مقادیر اصرم کہلاتی ہیں۔

ناطق ساز جز و ضربی: دو ایسی مقادیر اصرم کہ جن کا حاصل ضرب ایک ناطق عدد ہو تو دونوں ایک دوسرے کا ناطق ساز جز و ضربی کہلاتی ہیں۔